高等数学A

第4章 无穷级数

4.3 幂级数

4.3.3 幂级数的运算性质
4.3.4 幂级数和函数的性质

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

4.3 幂级数

幂级数及和函数的运算

- 4.3.3 幂级数的运算性质
  - 加减法
  - 乘法
  - 除法
- 4.3.4 幂级数的和函数的性质
  - 连续性
  - 可导性
  - 可积性
  - 习例1-4
- 内容小结

习题课
- 内容小结
- 常见题型
- 典型习例

一、幂级数的运算性质

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$，

$R=\min\{R_1, R_2\}$

加减法 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n. \quad x \in (-R, R)$$

乘法 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0$)

除法 $$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (\text{收敛域内} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0)$$

(相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多)

二、幂级数的和函数的性质

连续性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内连续.

且幂级数在区间端点收敛时，和函数在该区间端点连续.

即幂级数的收敛区间为闭区间时，和函数的连续区间也是该闭区间.

可导性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$

(收敛半径不变)

可积性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积,且对$\forall x \in (-R,R)$可逐项积分.

即$$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(收敛半径不变)

幂级数的和函数习例

例1 求 $\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$ 的和函数.

例2 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的收敛域与和函数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

例3 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域与和函数,并求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

例 4 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

方法: 通过恒等变形或逐项求导或逐项求积把原级数化为可求和的级数(等比级数).

例 1 求 $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$ 的和函数.

解 $\because \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}, \therefore R=3.$

当 $x=3$ 时, 原幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散;

当 $x=-3$ 时, 原幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $[-3,3)$.

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$, 且$s(0)=0$. $x\in[-3,3)$.

$$\text{则}s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3-x}.$$

$$s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{3-x}dx=-\ln(3-x)+\ln 3$$

$$\therefore s(x)=-\ln(3-x)+\ln 3,\quad x\in[-3,3).$$

例 2 求$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的收敛域与和函数,并求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

解 (1) $\because \rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \therefore R = 1.$

当$x = 1$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty} n$,发散;

当$x = -1$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$,发散.

$\therefore$收敛域为$(-1,1)$.

(2)设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，且$s(0)=1$.

$$=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)'$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{1+x}-1\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

例 3 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的收敛域与和函数,并求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解(1) $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)x^{2n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(2n-1)x^{2n-2}}\right| = \frac{1}{2}|x|^2$,

当$\frac{|x|^2}{2}<1$即$|x|<\sqrt{2}$时,原级数绝对收敛;

当$\frac{|x|^2}{2}>1$即$|x|>\sqrt{2}$时,原级数发散;

当$\frac{|x|^2}{2}=1$即$|x|=\sqrt{2}$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$,发散.

$\therefore$收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2)设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}x^2+\frac{5}{2^3}x^4+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}+\cdots$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^3+\frac{1}{2^3}x^5+\cdots+\frac{1}{2^n}x^{2n-1}+\cdots\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n\right)'=\left(\frac{1}{x}(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}-1)\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2}$

$$=s(1)-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

例 4 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解 考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛区间(-1,1),

则 $$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$$

$$=x\left(1\cdot 2+2\cdot 3\cdot x+3\cdot 4\cdot x^2+\cdots+n(n+1)x^{n-1}+\cdots\right)$$

$$=x\left(x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}+\cdots\right)''$$

$$=x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=s(\frac{1}{2})=8.$$

内容小结

幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

思考题

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变?

内容小结

1. 数项级数
   - 正项级数
   - 交错级数
   - 任意项级数

2. 幂级数
   - 幂级数的收敛半径与收敛域
   - 幂级数的和函数与数项级数的和

常见题型

1. 判别数项级数的敛散性

2. 求幂级数的收敛半径与收敛域

3. 求幂级数的和函数

4. 求数项级数的和

例1 判断级数敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

例2 判断级数敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$.

例3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

例4 讨论级数 $1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$的敛散性.

如果收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛.

例5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^{n}$ 收敛域及和函数.

例1 判断级数敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

解 $\because \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0,$$

根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

例2 判断级数敛散性： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}\quad(a>0).$

解 $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)},$

又 $n\geq 2$ 时, $n+2<e^n,$

从而有 $1<\sqrt[n]{\ln(n+2)}<\sqrt[n]{n},$ 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)}=1,$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{a}.$

当$a>1$即$0<\frac{1}{a}<1$时，原级数收敛；

当$0<a<1$即$\frac{1}{a}>1$时，原级数发散；

当$a=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$,

$\because \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，所以原级数也发散.

例3 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ 是否收敛？如果收敛，

是条件收敛还是绝对收敛？

解 $\because \quad \frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n = \ln n}$ 发散，

即原级数不是绝对收敛的．

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$是交错级数， 由莱布尼茨定理：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0,$$

$\because \quad f(x)=x-\ln x \quad (x>0),$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}>0 \quad (x>1),$$

$\therefore \quad f(x)=x-\ln x$在$(1,+\infty)$上单增,

即 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单减,

故 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 当 $n>1$ 时单减,

$$\therefore \quad u_n=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}=u_{n+1}\ (n>1),$$

所以此交错级数收敛, 故原级数是条件收敛.

例4 讨论级数 $1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\cdots$ 的敛散性.

如果收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛.

解 (1)当 $\alpha=1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$,它为条件收敛.

(2)当 $\alpha>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散,

故原级数发散.

(3)当 $\alpha<1$ 时,考察加括号的级数:

$$1-\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left[\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}\right]-\cdots$$

除第一项外均为负项,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n)^\alpha}-\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^\alpha}{(2n+1)2^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}$$

因为$\alpha<1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$为发散级数,

故由比较审敛法的极限形式知加括号的级数发散,

故原级数发散.

例5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数.

解 $\because$ $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛半径为 $R=1$,

$\therefore$ 收敛域为 $-1<x-1<1$, 即 $0<x<2$,

设此级数的和函数为 $s(x)$, 则有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n=\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}\Big]'$$

$$=\Big[\frac{x-1}{1-(x-1)}\Big]'=\Big(\frac{x-1}{2-x}\Big)'=\frac{1}{(2-x)^2}.$$