高等数学A

第4章 无 穷 级 数

4.1 正项级数

4.1.1 常数项级数
4.1.2 常数项级数的基本性质 收敛的必要条件
4.1.3 正项级数及其收敛性

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

4.1 正项级数

常数项级数与正项级数

- 4.1.1 常数项级数的概念
  - 级数的概念
  - 级数的收敛与发散
  - 习例1-4
- 4.1.2常数项级数的基本性质
  - 性质1~5
  - 习例5−9
- 常数项级数概念及性质的小结
- 4.1.3正项级数及其收敛性
  - 正项级数收敛的充要条件
  - 比较法
  - 习例10-11
  - 比较法的极限形式
  - 习例12
- 小结与思考题

一、常数项级数的概念

1. 级数的定义：

设有数列 $\{u_n\}$： $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

为一个无穷级数，简称为级数.

称 u_n 为级数的一般项或通项.

若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的每一项 u_n 均为常数，

则称该级数为常数项级数.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots ;$$

若级数的每一项均为同一个变量的

函数：$u_n = u_n(x)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 为函

数项级数.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad |x| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx + \cdots, \quad x \in R.$$

2、问题的提出

$$\frac{1}{3}=0.33333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

其结果是一个确定的数.

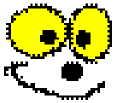
又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n=-1+1+(-1)+1+(-1)+\cdots=\begin{cases}0, n=2k\\ -1, n=2k+1\end{cases}$

其结果是不是一个确定的数.

再看一个例子:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

其结果多少?



$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+\cdots$$

$$s_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\qquad s_2=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3}$$

$$,\cdots\qquad s_n=1-\frac{1}{n+1}\qquad ,\cdots$$

3. 级数的敛散性定义

无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的前 n 项之和：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

称为级数的部分和.

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

S 称为级数的和：$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$.

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称无穷级数**发散**.

讨论无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,关心两个问题:

1.$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是否收敛?

2.若收敛,和为多少?

下面我们讨论判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的方法.

方法一:**利用部分和数列的敛散性判断**

常数项级数概念习例

例1 试述u_n, s_n, s的意义及它们的关系，

写出$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$中的$u_3$与$s_3$.

例2 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$的敛散性.

例3 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$$的收敛性.

例4 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的敛散性.

例1 试述u_n, s_n, s的意义及它们的关系,

写出$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$中的$u_3$与$s_3$.

解 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $u_n = s_n - s_{n-1}$.

$$u_3 = \frac{1}{3\cdot 4}, \quad s_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}.$$

技巧:

利用“拆项相消”求和

例2 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$的敛散性.

解 $\because u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}),$

$$\therefore s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 级数收敛, 和为$\frac{1}{2}$.

例3 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots (a \neq 0)$$ 的收敛性.

解 如果 $q \neq 1$ 时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当 $|q| < 1$ 时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 级数收敛

当 $|q| > 1$ 时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 级数发散

如果$|q|=1$时

当$q=1$时，　$s_n=na\to\infty$　　级数发散

当$q=-1$时，级数变为$a-a+a-a+\cdots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n$不存在　　级数发散

综上所述 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时,收敛于\dfrac{a_1}{1-q}. \\ 当|q|\geq 1时,发散 \end{cases}$

例4 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的敛散性.

解 $\because s_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$ $\therefore$原级数发散.

注意: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{i=1}^{n}u_i$不同.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是否收敛与$\lim_{n\to\infty}s_n$是否存在有关.

(3) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, s_n是s的近似值.

利用部分和数列和敛散性判断无穷级数的敛散性,一般不易求得数列和,此法应用范围较小.

下面给出利用级数性质判断的方法.

二、 常数项级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S, 即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛, 其和为 $c\,S$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$, 则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c\,u_k = c\,S_n$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c\,S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛, 其和为 $c\,S$.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2. 设有两个收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=S_n\pm\sigma_n\to S\pm\sigma\quad(n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

结论: **收敛级数可以逐项相加与逐项相减.**

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 . (用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

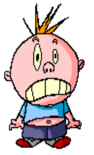
$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.



注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

性质5 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

级数收敛的必要条件

证 $\because \lim_{n\to\infty} s_n = s$,且$u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0$$

注意:

判别级数发散的充分条件

(1)若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

(2)若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$不一定收敛.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例5 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散.

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$$

但 $S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真.

常数项级数的基本性质习例

例6 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10\cdot 5^n-1}{6^n}$收敛.

例7 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{2n+3}$的敛散性.

例8 判别级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$的敛散性.

例9 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，下列级数是否收敛：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$； (2)$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$； (3)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$.

例6 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10\cdot 5^n-1}{6^n}$收敛.

证 $\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{10\cdot 5^n-1}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[10\cdot(\frac{5}{6})^n-(\frac{1}{6})^n\right]$

而$\sum_{n=0}^{\infty}10\cdot(\frac{5}{6})^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{6})^n$收敛,

由级数性质可知原级数收敛.

例7　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{2n+3}$的敛散性.

解　$\because \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+3}=\frac{5}{2}\neq 0,$

所以原级数发散.

例8 判别级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots$ 的敛散性.

解 $\because \frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10n})$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n}$ 发散,

由级数性质可知原级数发散.

例9 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 下列级数是否收敛:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001);\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000};\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}.$$

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty}(u_n+0.0001)=0.0001\neq 0,$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)\text{发散}.$$

(2) $\because \sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$同时敛散, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛.

(3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\infty,\quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$发散.

常数项级数概念及性质的小结

常数项级数的基本概念

基本审敛法 1. 由定义，若 $s_n \to s$，则级数收敛；

2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数发散；

3. 按基本性质.

记住1.几何级数(等比级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时, 收敛 \\ 当|q|\geq 1时, 发散 \end{cases}$

2.调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 是发散的.

由性质还有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+3}, \sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{1}{n-5}$ 等都发散

三、正项级数及其审敛法

1. **定义**：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数.

如果 $u_n < 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与正项级数有相同的敛散性.

2. 正项级数收敛的充要条件：

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$$

部分和数列 $\{s_n\}$ 为单调增加数列.

定理1（收敛准则）

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 s_n 有界.

理由

正项级数的部分和数列是单调增加的

单调有界的数列必有极限

在某极限过程中有极限的量必界

例1 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 是否收敛?

解 该级数为正项级数，又有 $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}\quad(n=1, 2, \ldots)$

故 当$n\geq 1$ 时，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

即其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，从而，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 收敛.

3. 正项级数的比较审敛法：

定理 2 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

(1) 若 $u_n \le v_n (n = 1,2,\cdots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $u_n \ge v_n (n = 1,2,\cdots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

大收则小收, 小发则大发.

证 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和为 σ_n, 收敛于 σ.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sigma_n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

即$u_1 \le s_n \le \sigma$，故s_n有界. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2)反设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 由(1)可得$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,与已知矛盾.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

注意：(1) 比收敛级数还小的级数收敛，
比发散级数还大的级数发散.

(2)若$u_n \le kv_n (n \ge N, k > 0)$,且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(3)若$u_n \ge kv_n (n \ge N, k > 0)$,且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

例 10 讨论 p−级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

例11 判别级数的敛散性:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n};\quad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0).$$

例 10 讨论 p–级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解 当 $p\le 1$时, $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则$p-$级数发散.

当 $p>1$时, $n-1\le x<n$有 $\frac{1}{n^p}\le\frac{1}{x^p}$,

则 $$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

考虑级数 $$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\qquad (*)$$

$$s_n=(1-\frac{1}{2^{p-1}})+(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}})+\cdots+[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}]$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_n=1$, 从而级数(*)收敛. 故$p-$级数收敛.

$\therefore p-$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}当p>1时, & 收敛\\ 当p\le 1时, & 发散\end{cases}$.

例11 判别级数的敛散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 (1) $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以原级数发散.

(2) $\because \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛.

(3) $\because \sin\frac{\pi}{2^n} \le \frac{\pi}{2^n}$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛，所以原级数收敛.

(4)当$a<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，所以原级数发散.

当$a=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}\neq 0$，所以原级数发散.

当$a>1$时，$\frac{1}{1+a^n}\le\frac{1}{a^n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a})^n$收敛，所以原级数收敛.

比较审敛法的不便：须有参考级数.

通常是p-级数和几何级数，调和级数.

4. 比较审敛法的极限形式:

定理 3.

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当 $0<l<+\infty$时,两级数有相同的敛散性;

(2) 当 $l=0$时,若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(3) 当 $l=+\infty$时,若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$ 对于 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0$,

$\exists N$, 当 $n>N$ 时, $l-\dfrac{l}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<l+\dfrac{l}{2}$

即 $\dfrac{l}{2}v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}v_n \quad (n>N)$

由比较审敛法的推论, 得证.

(2) 取 $\varepsilon=1$, 可得结论.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$, 则 $u_n>v_n$,

$\therefore$ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 12　判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$;

例 12 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$;

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

故原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1>0$,

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，故原级数收敛.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散 ;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛 ;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散 .

特别取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得如下结论 :

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例13. 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$的敛散性. $\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]\text{收敛}.$$

例14 判别级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$ 的敛散性.

解 $u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!} \le \frac{n(n!)}{(2n)!}$

$$= \frac{1}{2(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)} \le \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = v_n$$

而 $\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$, 即 $0 < l = \frac{1}{2} < +\infty$,

由比较判别法及 P 级数的收敛性可知:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，从而原级数收敛.

内容小结

二. 利用正项级数的比较审敛法及其极限形式

(1)大收则小收，小发则大发.

(2) $\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l,$

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散 .

(3)

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

思考题

1. 当一个级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的一般项u_n收敛于 0 时，该级数是否收敛？

2. 一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值是否有关？

3. 如果加括号后所成的级数收敛，那去括号后原来的级数是否也收敛？

4. 如何应用正项级数的比较审敛法？