高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.2 中值定理

2.2.3 L'Hospital(罗必塔)法则

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.2 中值定理

中值定理—L'Hospital 法则

- 2.2.3 L'Hospital法则
  - 未定式$\frac{0}{0}$的极限
    - L'Hospital 法则
    - 习例1-3
  - 未定式$\frac{\infty}{\infty}$的极限
    - L'Hospital 法则
    - 习例4-6
  - 未定式的$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$的极限及习例7-14
- 内容小结
- 课堂思考与练习

Review:

$$1^0, \frac{0}{0}\text{未定式的极限求法}\begin{cases}\text{因式分解}\\ \text{根式有理化}\\ \text{重要极限1}\\ \text{等价无穷小替换}\end{cases}\text{等}$$

但考虑$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}, \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$等,不易求得

$2^0, \frac{\infty}{\infty}$未定式的极限求法:

如果是多项式分式，可比较分子分母的最高次项

而其它的如$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$,用前面的方法不易求得

一.未定式$\frac{0}{0}$的极限

L'Hospital法则 I:

设 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0;$

(2) $f(x)$与$g(x)$在$U(\tilde{x}_0,\delta)$内可导,且$g'(x)\neq 0;$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty),$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty).$

证明: $\because \lim_{x\to x_0} f(x)=0, \lim_{x\to x_0} g(x)=0,$

$\therefore x_0$ 是$f(x), g(x)$的连续点或可去间断点.

若 x_0为连续点, 则 $f(x_0)=0, g(x_0)=0,$

若x_0为可去间断点,则可补充定义使$f(x_0)=0, g(x_0)=0,$

$\forall x\in U(\tilde{x}_0,\delta)$, 则$f(x), g(x)$在以$x_0$与$x$为端点的闭区间上连续,开区间内可导, 且 $g'(x)\neq 0;$

由Cauchy中值定理,至少存在介于x_0与x间的点ξ,使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

且当$x \to x_0$时,必有$\xi \to x_0$.

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注意: (1) 极限过程还包括 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$,

$x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

(2)当导函数$f'(x), g'(x)$仍满足L'Hospital法则的条件时,可再用法则得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

如果有必要，还可接连三次、四次以至n次应用法则.

L'Hospital 法则习例

例1. 计算 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$.

例2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

例3. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

例1. 计算 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$.

解: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(1+\cos x)'}{(\tan^2 x)'}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\tan x\sec^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}(-\frac{\cos^3 x}{2})=\frac{1}{2}.$$

例2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$=\dfrac{1}{6}$.

在运用罗必达法则求极限过程中，极限存在并且不等于零的因子可以提出来，这样可使问题简化.

例3. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(\dfrac{1}{x})'}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

二. 未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的极限

L'Hospital法则 II:

设 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $U(\tilde{x}_0,\delta)$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞),

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞).

注意：(1) 极限过程还包括 $x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，

$x \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$.

(2)法则II和法则I一样，也可连续应用几次.

如：$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

L'Hospital 法则习例

例4. 计算 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}(\mu>0)$, (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{e^{x}}$.

例5. 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\cot 2x}$.

例6. 计算 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

例4. 计算 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\mu}}(\mu>0)$, (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n}}{e^{x}}$.

解:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\mu})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0.$$

$$(2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^{x}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^{x}}=0.$$

说明e^{x}比x^{n}比$\ln x$趋于∞的速度快得多.

例5. 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\cot 2x}$.

解: $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\cot 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{-2\csc^2 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{-2\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}{-2\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x}{1}=-2.$$

例6. 计算 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x}$;(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$;

但 $\dfrac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$, 不能用L'Hospital法则.

(3) $\because\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})'}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, 不能用L'Hospital法则.

用其它方法: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=1$.

练习：1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.　　$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

在使用罗必达法则时，要注意进行化简工作，它会使问题变得简单 .

解　原式 $\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx}{\cos ax}=1.$$

- 在运用罗必达法则求极限过程中，极限存在并且不等于零的因子可以提出来，这样可使问题简化.

练习2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 由等价无穷小替换, 有

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$\overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}.$$

洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.例如:在运用罗必达法则求极限过程中，尽可能运用等价无穷小替代方法，它往往可使问题得到明显的简化.

练习3. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

下面的介绍的是利用倒数法或取对数法将其它的不定型转化为可以运用罗必达法则计算的例题 .

三. 未定式的$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0},0^{0}$的极限

1. 若$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$, 则

$$\lim f(x)g(x)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\ ---\left(\frac{0}{0}\right)$$

或 $$\lim f(x)g(x)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\ ---\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

2. 若$\lim f(x)=\infty,\lim g(x)=\infty$, 则

$$f(x)-g(x)=\infty-\infty\rightarrow\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\rightarrow\frac{0-0}{0\cdot0}\rightarrow\frac{0}{0}.$$

3. 对于幂指函数的极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$,有两种方法.

$$(1)\ \lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$$

(2) 令 $y=[f(x)]^{g(x)}$, 则 $\ln y=g(x)\ln f(x)$——$(0\cdot\infty)$,

$$\therefore \lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\ln y}.$$

$$\left.\begin{array}{l}0^0\\ 1^\infty\\ \infty^0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{取对数}}\left\{\begin{array}{l}0\cdot\ln 0\\ \infty\cdot\ln 1\\ 0\cdot\ln\infty\end{array}\right.\Rightarrow 0\cdot\infty.$$

习例

例7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$.

例8. 计算 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

例9. 计算 $\lim\limits_{x\to0}(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x})$.

例10. 计算 $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

例11. 计算 $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{-\frac{1}{\varphi^{2}}}$.

例12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^x-1}{\ln(1+x)}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$,

问 $f(x)$在 $x=0$处是否连续可导?

例13. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{1}{n})^{n^2}$.

例14. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$,求 a,b,c.

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$.　　$(0\cdot\infty)$

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}$$

$$=+\infty.$$

用另一种形式颠倒行不行？

行，但繁些．

存在一个选择问题.

例8. 计算 $\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$.

$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0}$

$\Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

解:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例9. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x})$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x-\dfrac{e^{2x}}{\sin x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{2x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{2x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2e^{2x}}{1}$$

$$=-2.$$

例10. 计算 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

解: 令 $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, 则 $\ln y = \dfrac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$.

$$\because \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{xe^x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^1 = e.$$

例11. 计算 $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{-\frac{1}{\varphi^2}}$.

解：令 $y=\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{-\frac{1}{\varphi^2}}$，则 $\ln y=-\dfrac{1}{\varphi^2}\ln\left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$.

$$\because \lim_{\varphi\to 0}\ln y=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\ln\varphi-\ln\sin\varphi}{\varphi^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\dfrac{1}{\varphi}-\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{2\varphi}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2\varphi^2\sin\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2\varphi^3}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-\cos\varphi+\varphi\sin\varphi}{6\varphi^2}=\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^{-\frac{1}{\varphi^2}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

例12. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+e^{x}-1}{\ln(1+x)}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$,

问 $f(x)$在 $x=0$处是否连续可导?

解: $\because f(0)=2,$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^{x}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+e^{x}}{\dfrac{1}{1+x}}=2,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=2=f(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x+e^{x}-1}{\ln(1+x)}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^{x}-1-2\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+e^{x}-\dfrac{2}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(\cos x+e^{x})-2}{(1+x)\ln(1+x)+x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+e^{x}+(1+x)(-\sin x+e^{x})}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{3}{2}.$$

故 $f(x)$在 $x=0$处可导.

例13. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^{n^2}$.

注意对数列极限未定式不能直接用洛必达法则,而是要将其转化为函数形式

解: 令 $y=\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$, 则 $\ln y = x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

$$\because \lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln(\cos\frac{1}{x}) \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t\cos t} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}. \quad \therefore \lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})^{n^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

例14. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$，求 a,b,c.

解: $\because \lim\limits_{x\to 1}[a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}]=0,$

$\therefore c=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3}=2.$

从而

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2a(x-1)+b-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2a-\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}}{2}$$

$=0.$

由 $\lim\limits_{x\to 1}[2a(x-1)+b-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}]=0,$

$$\therefore b=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2a-\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}}{2}=0,$$

$$\therefore a=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}}{2(x^2+3)}=\frac{3}{16}.$$

内容小结

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

洛必达法则

令 $y = f^g$

取对数

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$0 \cdot \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

备用题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解： 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ （令 $t=\frac{1}{x}$）

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\frac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}$ **(用洛必达法则)**

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$ **(继续用洛必达法则)**

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

解: 原式 $$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}]$$

Actually, L’Hôpital’s Rule was developed by his teacher Johann Bernoulli. De l’Hôpital paid Bernoulli for private lessons, and then published the first Calculus book based on those lessons.

洛必达法则（l'Hôpital's rule）是利用导数来计算具有不定型的极限的方法。这法则是由瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli）所发现的，因此也被叫作伯努利法则（Bernoulli's rule）。

Guillaume De l'Hôpital
1661 - 1704

洛必达(1661 – 1704)

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“ 洛必达法则 ”他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题 , 以后又解出了伯努利提出的“ 最速降线 ” 问题 ,在他去世后的1720 年出版了他的关于圆锥曲线的书 .