高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.2 中值定理

2.2.2 泰勒公式

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.2 中值定理

微分中值定理

- 2.2.2 Taylor公式
  - Talylor公式的建立
  - Talylor公式
  - 几个初等函数的Maclaurin公式
- Talylor公式的应用
  - 利用Taylor公式求极限习例1-3
  - 利用Taylor公式证明不等式习例4-7
  - 在近似计算中的应用习例8-9
- 内容小结
- 课堂思考与练习

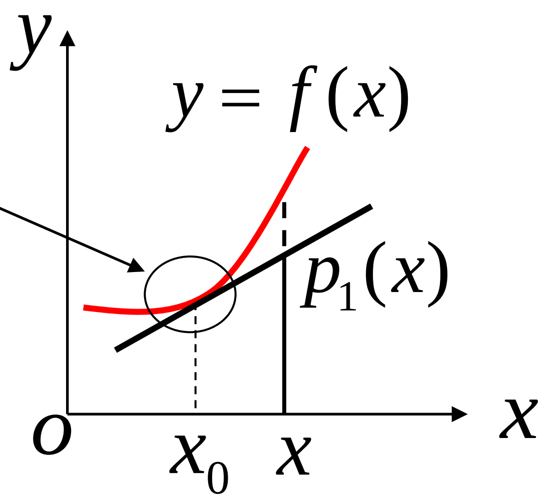
一、Talylor公式的建立

多项式是最简单的函数（只涉及加法和乘法），本节考虑用多项式去近似地表示一个复杂的函数。

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{p_1(x)}$$

x 的一次多项式



局部线性化，局部用切线代替曲线

特点：$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

需要解决的问题 $\left\{ \begin{array}{l} \text{如何提高精度？} \\ \text{如何估计误差？} \end{array} \right.$

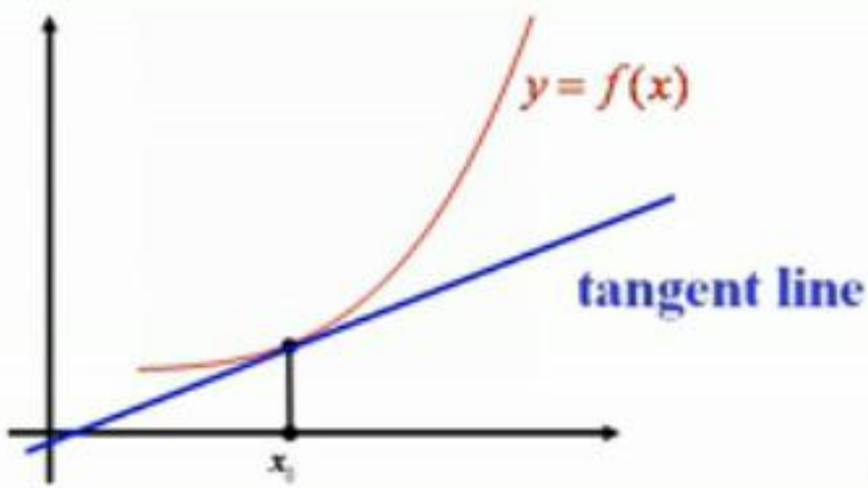
用切线近似代替曲线的不足之处：

（1）精度不高：

$f(x)-p(x)=o(x-x_0)$：仅为$x-x_0$的高阶无穷小；

（2）适合范围小；

（3）误差 $o(x-x_0)$ 不易定量估计。



为此，我们需要寻求一个更高次（n次）的多项式来近似地表示函数 $f(x)$:

$$p_n(x) = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + a_3(x-x_0)^3 + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

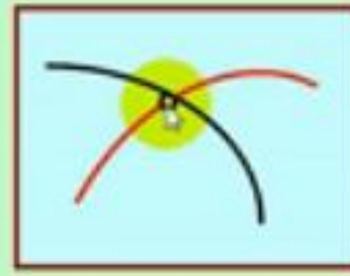
我们希望这个多项式与 $f(x)$ 在 x_0 处有相同的 0~n 阶导数：

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \ (k = 0,1,2,\dots n)$$

如果两个函数在一点处有相同的函数值和各阶导数，则它们在该点附近有较高的近似程度。

两个函数在点 x_0 有相同的函数值，

两条曲线在点 (x_0, y_0) 处相交



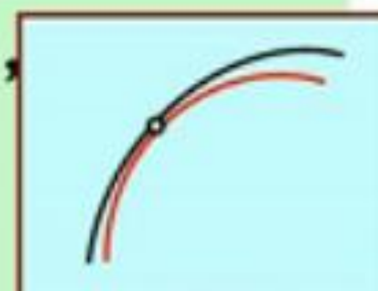
两个函数还在点 x_0 有相同的导数，

两条曲线在点 (x_0, y_0) 处相切

它们有相同的倾斜度（变化率）

两个函数还在点 x_0 有相同的二阶导数，

两条曲线在点 (x_0, y_0) 处还有相同的弯曲方向和弯曲程度（曲率）。



如果两个函数在一点处有相同的函数值和各阶导数，则它们在该点附近有较高的近似程度。

设想两个运动的质点的运动方程在某一时刻有相同的0～2阶导数：

$s_1(t_0)=s_2(t_0)$：

它们在时刻t_0有相同的位置

$s_1'(t_0)=s_2'(t_0)$：

它们时刻t_0还有相同的速度

$s_1''(t_0)=s_2''(t_0)$：

它们在时刻t_0还有相同的加速度

命题

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处有相同的 0~n 阶导数：

$$g^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad(k=0,1,2,\ldots)$$

则 $$f(x)-g(x)=o[(x-x_0)^n]\ (x\to x_0)$$

这个命题说明：如果两个函数在一点处有相同的函数值和各阶导数，则它们在该点有较高的近似程度。

证明思路：

先证明一个引理：设

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

则 $$f(x)=o[(x-x_0)^n] \quad (x\to x_0)$$

只需证明：$\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}=\ldots=0$

方法： 使用洛必达法则 n-1次

设函数 $f(x)$ 与多项式 $p_n(x)$ 在点 x_0 处有相同的 0~n 阶导数：

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

则 $$f(x)-p_n(x)=o[(x-x_0)^n]$$

得 $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]$$

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$ 误差：$o[(x-x_0)^n]$

系数 a_k 如何确定？

1.求n次近似多项式$p_n(x)$,要求:

$$p_n(x_0)=f(x_0),p_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,p_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

令 $p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

则 $p_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$p_n''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_n^{(n)}(x)=n!a_n$

$a_0=p_n(x_0)=f(x_0),\qquad a_1=p_n'(x_0)=f'(x_0),$

$a_2=\frac{1}{2!}p_n''(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0),\cdots,a_n=\frac{1}{n!}p_n^{(n)}(x_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$

故 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

命题 若 $p_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\ (k=0,1,2,\ldots)$

则
$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\quad(k=0,1,2,\ldots)$$

定理（带 Peano 余项的 Taylor 公式）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $0\sim n$ 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]$$

$f(x)$的 n 次 Taylor多项式

带 Peano余项的 Taylor 公式

优点：条件较弱：只需在 x_0 有 n 阶导数

缺点：误差不容易作定量分析

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. 余项估计

令 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ **(称为余项)，则有**

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间})$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)\cdots 2(\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_n \text{ 之间})$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\because p_n^{(n+1)}(x) = 0, \therefore R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

当在 x_0 的某邻域内 $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$ 时

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}$$

$$\therefore \ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad (x \to x_0)$$

二、Talylor中值定理

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有

直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶Talylor公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的Lagrange余项 .

注意到 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ ③

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n] \quad ④$$

公式 ③ 称为n 阶Talylor公式的Peano余项 .

* 这里只要求

$f(x)$ 在点 x_0 有直到 n 阶的导数

$\Longrightarrow$ ④ 式成立

Lagrange余项

优点：便于误差估计

缺点：条件较强

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

特例: (ξ 在 x_0 与 x 之间)

(1) 当 $n=0$ 时, Taylor公式变为Lagrange中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

(2) 当 $n=1$ 时, Taylor公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

可见 $f(x)\approx f(x_0)+\underline{f'(x_0)(x-x_0)}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

$\boxed{\mathrm{d}f}$

误差 $R_1(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

在Talylor公式中,若取$x_0 = 0, \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1)$,则有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

称为Maclaurin 公式 .

由此得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

若在公式成立的区间上$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M$,则有误差估计式

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M}{(n+1)!} \left| x \right|^{n+1}$$

三、几个初等函数的Maclaurin公式

(1) $f(x)=e^{x}$

(2) $f(x)=\sin x$

(3) $f(x)=\cos x$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

(1) $f(x)=e^x$

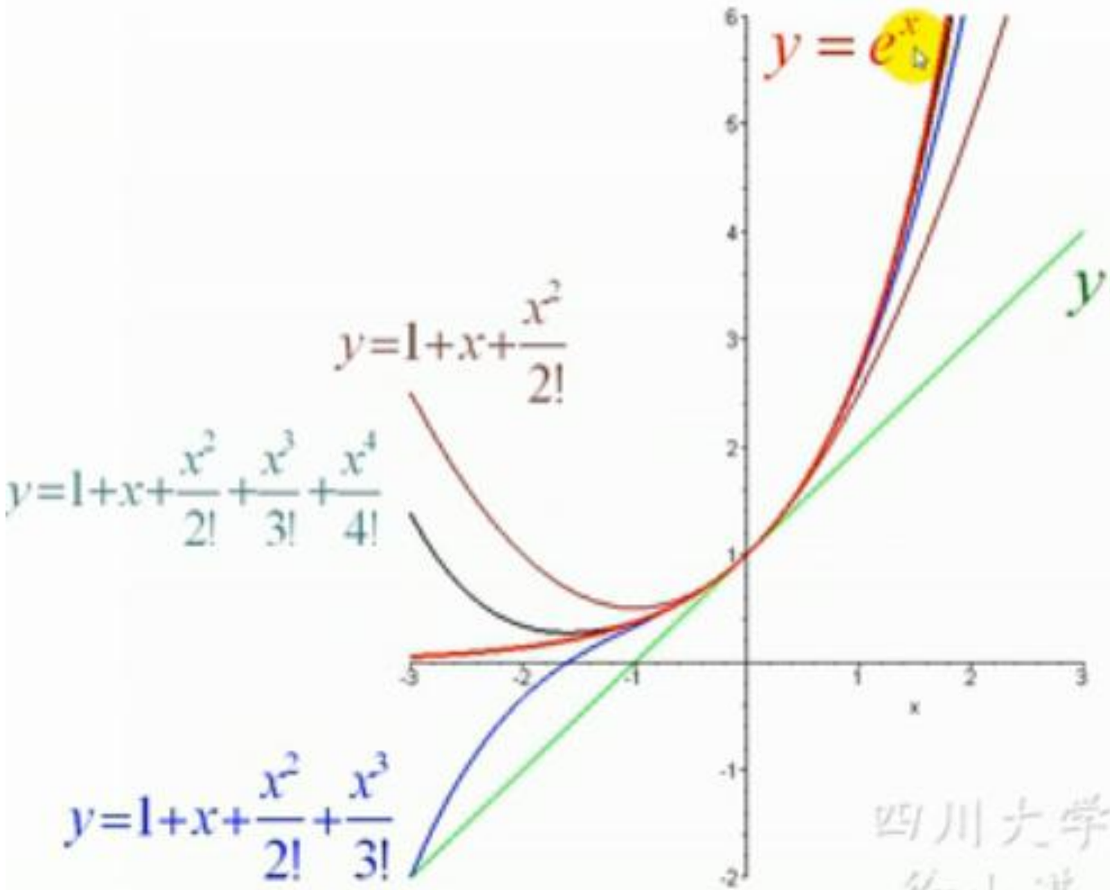
$$\because \quad f^{(k)}(x)=e^x, \quad f^{(k)}(0)=1 \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$ 带Peano余项

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$


$y = e^x$
$y=1+x$
$y=1+x+\frac{x^2}{2!}$
$y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$
$y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$
-3 -2 -1 1 2 3
x
-2 -1 1 2 3 4 5 6

优酷
四川大学
徐小湛

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

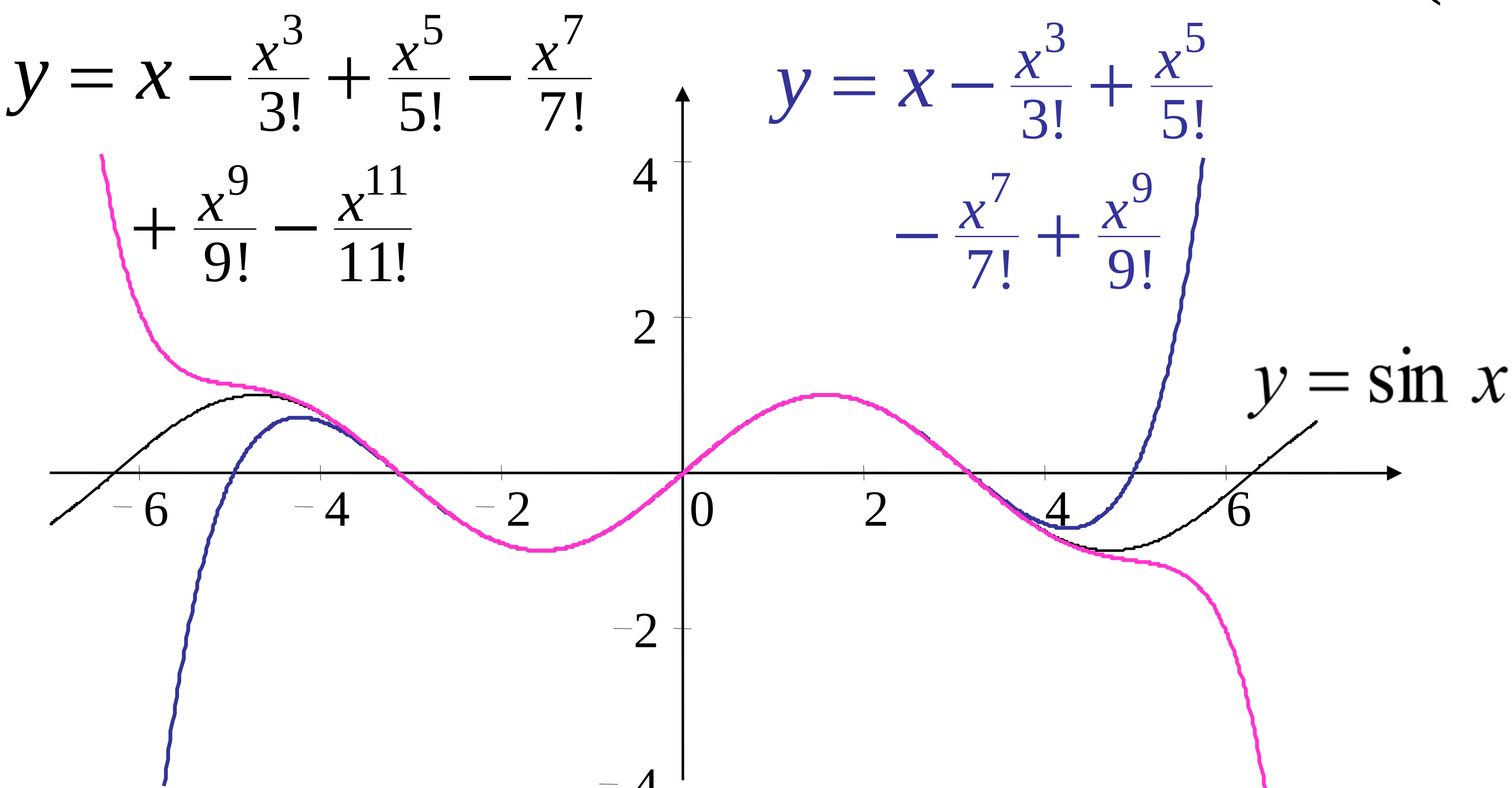
$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\(-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases}\quad(m=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)\,!}+R_{2m}(x)$$

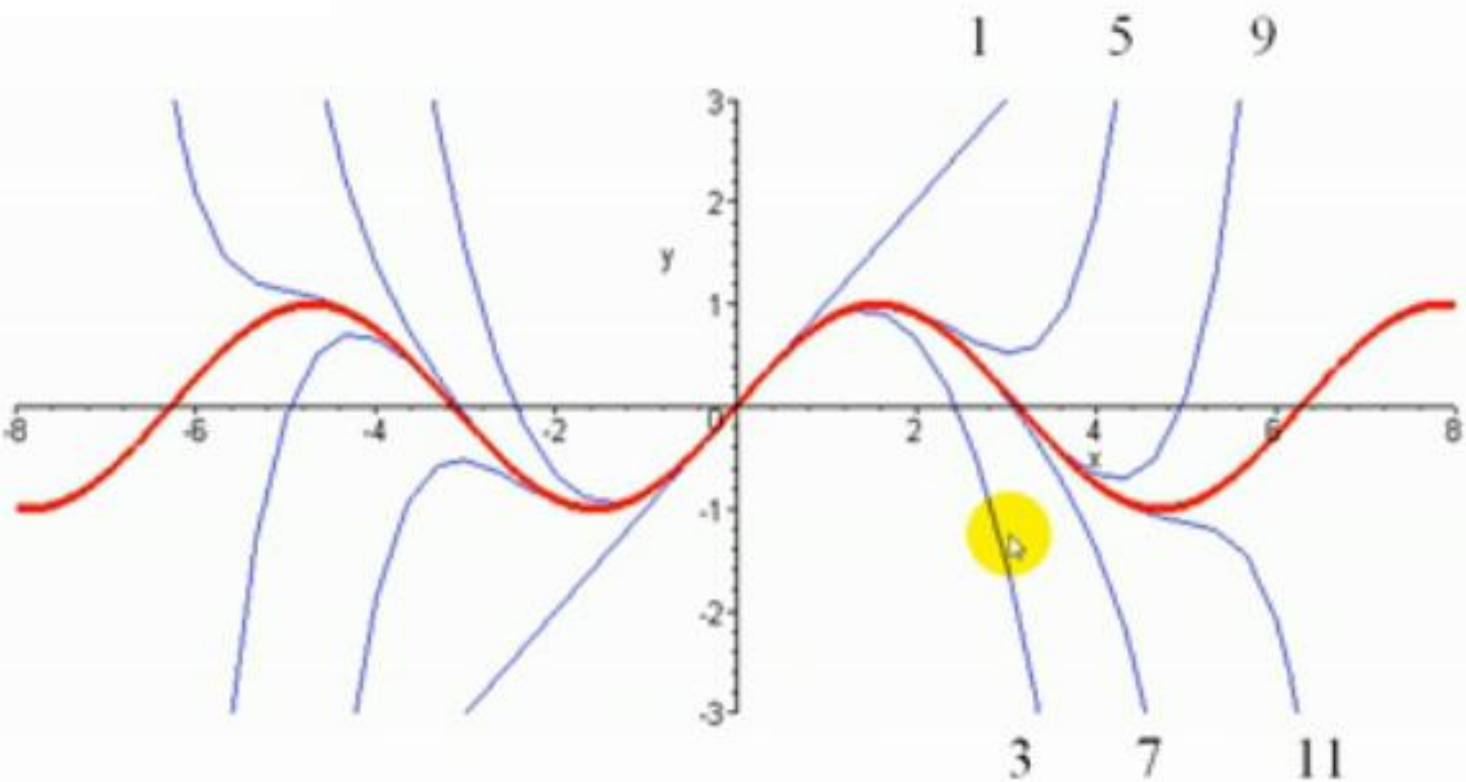
其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)\,!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$

泰勒多项式逼近 $\sin x$

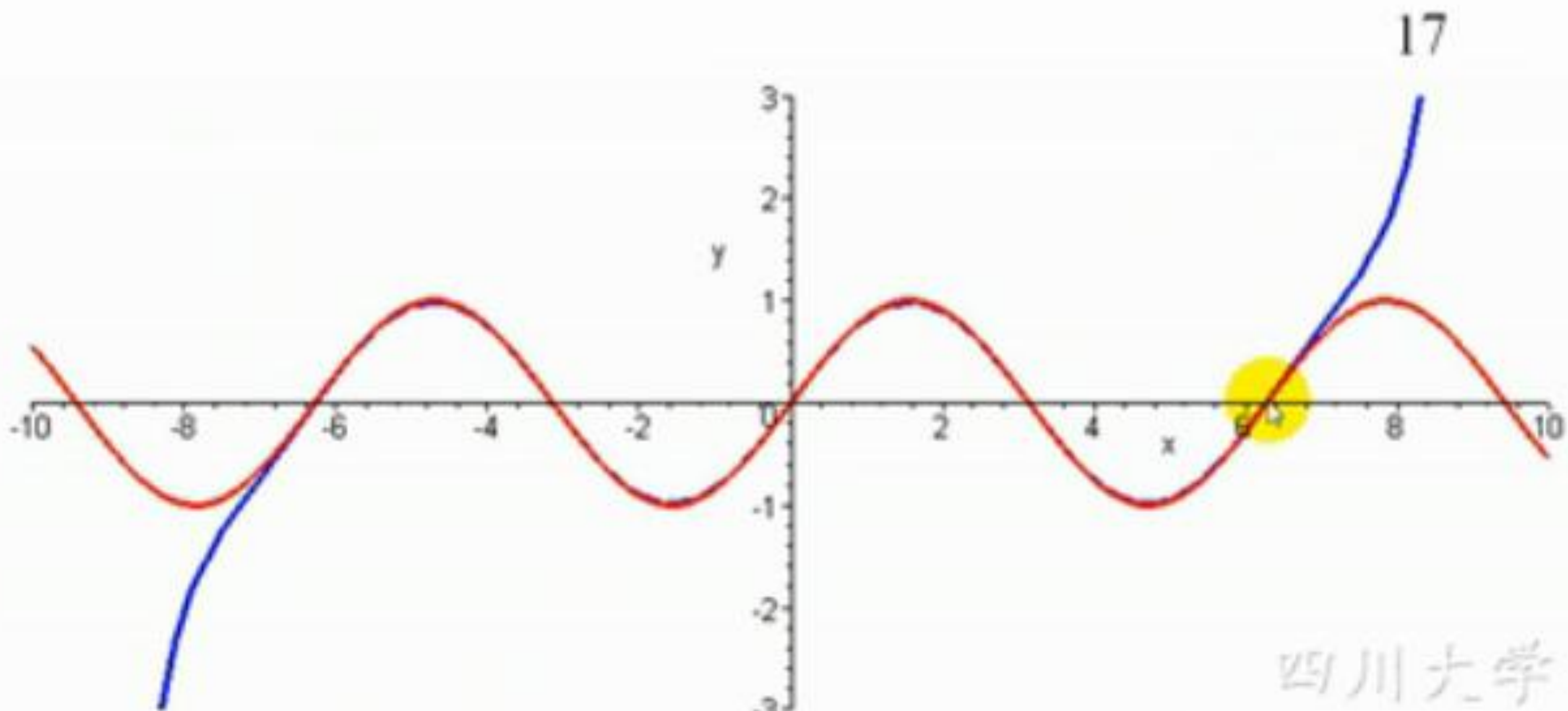
$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



用多项式逼近函数 y＝sinx



用多项式逼近函数 y=sinx



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$$

Peano 余项

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$$

$$\sin x = x + o(x^2)$$ **Peano 余项**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}\, x^{2m+2} \quad (0<\theta<1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

Peano 余项

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$(0<\theta<1)$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0<\theta<1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

四、泰勒公式的应用

1. 利用麦克劳林公式求函数在其它点的泰勒公式（间接法）

例1.求函数$y=\dfrac{1}{x}$在$x_0=1$处的泰勒公式.

例2.求函数$y=\sin x$在$x_0=\dfrac{\pi}{4}$处的泰勒公式.

2. 利用泰勒公式求极限

例3.计算 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

例1.求函数$y=\frac{1}{x}$在$x_0=1$处的泰勒公式.

解：$y=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}$

由$\frac{1}{1+u}$的麦克劳林公式$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^n u^n+o(u^n)$

得$y=\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+o(x^n)$$

例2.求函数$y=\sin x$在$x_0=\frac{\pi}{4}$处的泰勒公式.

解: $y=\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})]$

由$\sin u$的麦克劳林公式$\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{u^{2m+1}}{2m+1!}+o(u^{2m+1})$

由$\cos u$的麦克劳林公式$\cos u=1-\frac{u^2}{2}-\frac{1}{4!}u^4+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{u^{2m}}{2m!}+o(u^{2m})$

得$y=\sin x$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2m-1}+\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{m}}{(2m)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2m}]+o((x-\frac{\pi}{4})^{2m-1})$$

例3.计算（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

解: $\because e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3),$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

用麦克劳林公式进行的是等量代换，因此这种代换也可以在加减项之间进行。

$o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.

解: $\because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$,

$$\therefore \ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}).$$

$x^m o(x^n)=o(x^{m+n})$

$$x^2\ln(1+\frac{1}{x})=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x}).$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}-o(\frac{1}{x})\right]=\frac{1}{2}.$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}.$$

用洛必塔法则不方便!

解: 用Taylor公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}\ =2(1-\tfrac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}\ =2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例4. 证明$\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0).$

例5. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数, 且

$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0,$ 证明：至少存在点$\xi\in(0,1)$使

$$|f'''(\xi)|\geq 24.$$

例6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导,满足$|f(x)|\leq 1,$

$|f''(x)|\leq 1,$ 证明：在$(-\infty,+\infty)$内必有$|f'(x)|\leq 2.$

例7. 设$f(x)$在(a,b)内二阶可导,且$f''(x)\geq 0,$ 证明对于

(a,b)内任意两点x_1,x_2及$0\leq t\leq 1,$ 有：

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

例4. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$.

证明: $\because \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \qquad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

例5. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数, 且 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0$, 证明: 至少存在点$\xi\in(0,1)$使

$$|f'''(\xi)|\ge 24.$$

证明: 由 $f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数,且 $f'(\frac{1}{2})=0$,

可将$f(x)$在$x_0=\frac{1}{2}$处展开成二阶Taylor公式:

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \qquad (\xi\text{介于}x\text{与}\frac{1}{2}\text{之间})$$

即 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3$

$(\xi$介于x与$\frac{1}{2}$之间$)$

从而

$$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\quad(0<\xi_1<\frac{1}{2})$$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\quad(\frac{1}{2}<\xi_2<1)$$

两式相减得，$1=\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]\left(\frac{1}{2}\right)^3$

令$|f'''(\xi)|=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，则$|f'''(\xi)|\geq 24.$

例6. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导,满足$|f(x)|\le 1$,

$|f''(x)|\le 1$,证明:在$(-\infty,+\infty)$内必有$|f'(x)|\le 2$.

证明: $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

(ξ介于x_0与x之间).

$$\therefore\ f'(x_0)(x-x_0)=f(x)-f(x_0)-\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

$$|f'(x_0)|(x-x_0)\le|f'(x_0)||x-x_0|$$

$$\le|f(x)|+|f(x_0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|(x-x_0)^2\le 2+\frac{1}{2}(x-x_0)^2.$$

即 $\frac{1}{2}(x-x_0)^2-|f'(x_0)|(x-x_0)+2\geq 0.$

$\therefore \Delta=|f'(x_0)|^2-4\leq 0 \Rightarrow |f'(x_0)|\leq 2.$

$\therefore |f'(x)|\leq 2.$

例7. 设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)\ge 0$，证明对于(a,b)内任意两点x_1,x_2及$0\le t\le 1$，有：

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证明： $\forall x_0\in(a,b)$，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

(ξ 在 x_0 与 x之间).

$$\because\ f''(x)\ge 0,\ \therefore\ f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

从而，

$$f(x_1)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),$$

$$f(x_2)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),$$

令 $x_0=(1-t)x_1+tx_2$,

$$x_1-x_0=t(x_1-x_2),\quad x_2-x_0=(t-1)(x_1-x_2),$$

$$(1-t)f(x_1)\geq(1-t)f(x_0)+f'(x_0)(1-t)t(x_1-x_2),$$

$$tf(x_2)\geq tf(x_0)+f'(x_0)t(t-1)(x_1-x_2),$$

$\therefore (1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq f(x_0)$,

即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

3. 在近似计算中的应用

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

M 为 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

在近似计算中的应用习例

例8、计算无理数 e 的近似值，使误差不超过10^{-6}.

例9、用近似公式$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$计算 $\cos x$ 的近似值，使其精确到 0.005，试确定 x 的适用范围.

例8、计算无理数 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

令 $x = 1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$，欲使

$$\left|R_n(1)\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立，因此

$$e = 2.718281$$

说明: 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7\times0.5\times10^{-6}$,

总误差为 $7\times0.5\times10^{-6}+10^{-6}<5\times10^{-6}$

这时得到的近似值不能保证误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位.

例9、用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值，

使其精确到 0.005，试确定 x 的适用范围.

解: 近似公式的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x) \right| \le \frac{|x|^4}{24}$$

令 $\frac{|x|^4}{24} \le 0.005$

解得 $|x| \le 0.588$

即当 $|x| \le 0.588$ 时，由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005.

内容小结

1. 泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n)$$

$(\xi$ 在 x_0 与 x 之间$)$

当 $x_0 = 0$ 时为**麦克劳林公式**.

2. 常用函数的麦克劳林公式

$$e^x,\ \ln(1+x),\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^\alpha$$

3. 泰勒公式的应用

(1) 近似计算

(2) 利用多项式逼近函数，例如 $\sin x$

(3) 其他应用 ——— 求极限，证明不等式 等.

思考题： 习题2.2　第1题（6）到（7）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.2　第16题到第17题

练习参考答案

如果一个函数如果可以用等号后面的东西表示出来的话，那么这个函数就是说，可以用泰勒展开式的方法展开来的。
在人类历史上，人类对泰勒展开式的兴趣之所以那么高，完完全全是因为（x-a）的n次方，（x-a）的n次方是多项式，多项式是当时人类最熟悉的函数形式之一。

但是在比较高等的数学里，我们有兴趣的完完全全是f(x)在a处的n阶导数这一项。这个n阶导数完全刻画出了泰勒展开式最重要的一个特征，叫 做：“一叶知秋”。什么叫做“一叶知秋”，就是说一片叶子掉下来，我就知道秋天到了。好，f(x)在a处的n阶导数，导数的定义是什么，导数的定义是在x 趋近于a的时候在a的邻域所发生的事情。f(x)在a处的n阶导数就是它的一阶变化率，二阶变化率，三阶变化率... 但是呢，它始终是在a的旁边一点点。我只要知道a点附近的这些东西，除以n的阶乘，再乘以（x-a）的n次方，我就完完全全可以知道函数在整个坐标系里的 行为是什么，就知道了这个函数是什么。也就是说，我只要得到a附近的一点点的信息，我就可以知道这个函数长什么样子。

不只是这些，a还可以动，也就是说，函数上任意一点的邻域都包含着函数的全部讯息！这就是泰勒展开式最重要的意义。

事实上泰勒展开式所研究的函数的种类，是数学上很稀少的一类，叫做解析函数。
我们的人生是解析函数吗？如果是的话，我们可以在最短最短时间内我们所经历的一切，外推到整个人生。所以说，如果人生是解析函数的话，那就太棒了。我们只要活一点点，我们就可以用一点点的生涯去幻想无穷无尽的生命到底是长什么样子。
有一个我很敬佩的数学家，他说过一句话，“死并不可怕，死只是我所遇到的最后一个函数”。意思就是说，其实他认为人生并不是解析函数，他在那个时候已经认识到了，人生是充满着断点，跳跃，以及不连续点，人生是一个非常非常算是 正规 的函数。因为事实上，Weierstrass已经证明：处处连续但处处不可微分的函数才是函数的常态。