高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.1 导数及微分

2.1.6 函数的和、积、商的导数

2.1.7 反函数的导数

2.1.8 复合函数的导数

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.1 导数及微分

导数及微分

- 2.1.6 函数的和、积、商的导数
  - 导数的四则运算
  - 求函数导数习例1-5
- 2.1.7 反函数的导数
  - 反函数的求导法则
  - 反函数的求导数习例6-9
- 2.1.8 复合函数的导数
  - 复合函数的求导法则
  - 复合函数求导数习例10-17
- 导数基本公式
  - 导数基本公式
  - 初等函数求导数的习例18-20
- 内容小结
- 课堂思考与练习

复习上节推导的基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0.$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}. \qquad (\mu \in R)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (e^x)' = e^x.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x)' = 1,$$

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})'$$

$$= -\frac{1}{x^2}.$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

例1

$$(4^x)' = 4^x \ln 4$$

$$(a^{bx})' = ((a^b)^x)'$$

$$= (a^b)^x \ln a^b = ba^{bx} \ln a$$

$(a > 0$、b 为常数$)$

一、导数的四则运算

定理1： 设函数$u=u(x),v=v(x)$都在x处可导,则

$$(1)\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$$

$$(2)\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$(3)\left[Cu(x)\right]'=Cu'(x)$$

$$(4)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0)$$

$$(5)\left[u(x)v(x)w(x)\right]'$$

$$=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x),$$

$$(6)\left[\frac{1}{v(x)}\right]'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

证明:

(1)设 $y=u(x)+v(x)$, 则

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x})=u'(x)+v'(x),$$

$$\therefore [u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x).$$

同理 $[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x).$

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

例如, $(u+v-w)'=u'+v'-w'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

证：设 $f(x) = u(x)v(x)$，则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

故结论成立.

推论：1) $(Cu)' = Cu'$ (C为常数)

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} f_i'(x)f_k(x);$

(4)设 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，则

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]v(x)-u(x)[v(x)+\Delta v]}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u v(x)-u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) - \frac{\Delta v}{\Delta x} u(x)}{[v(x)+\Delta v]v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (\Delta v \to 0 \text{ as } \Delta x \to 0),$$

$$\therefore \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0).$$

特别地：$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$

如：$(e^{-x})' = (\frac{1}{e^x})' = -\frac{(e^x)'}{e^{2x}} = -e^{-x}$

注意：$[u(x) \cdot v(x)]' \neq u'(x) \cdot v'(x);$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

求函数导数习例

例1 设$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^2 + a_{n-1}x + a_n$， 求$y'$.

例2. 设 $f(x) = \cot x$, 求 $f'(x)$.

例3. 设$f(x) = \csc x$,求$f'(x)$.

例4.设$f(x) = shx$, 求$f'(x)$.

例5. 设 $f(x) = \dfrac{x\cos x}{1+\sin x}$, 求$f'(x)$.

例6. 已知 $g(x)$ 在 $U(0,\delta)$内连续, $g(0) = a$, 求$f(x) = xg(x)$ 在$x = 0$处的导数.

例1 设$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^2 + a_{n-1}x + a_n$，求$y'$.

解：$y' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \cdots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)'$

$$= a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}2x + a_{n-1}$$

通常说，多项式的导数仍是多项式，其次数降低一次，系数相应改变。

例2. 设 $f(x)=\cot x$, 求 $f'(x)$.

解: $\because f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

$\therefore\ (\cot x)'=-\csc^2 x.$

同理 $(\tan x)'=\sec^2 x.$

Back

例3.设$f(x)=\csc x$,求$f'(x)$.

解: $\because f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$,

$$f'(x)=\frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cot x,$$

$\therefore\ (\csc x)'=-\csc x\cot x.$

同理 $(\sec x)'=\sec x\tan x.$

Back

例4.设$f(x)=shx$,求$f'(x)$.

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

解 $y' = (shx)' = [\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})]' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx.$

说明: 类似可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x\,; \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Back

例5. 设 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{1+\sin x}$,求$f'(x)$.

解: $$f'(x)=\frac{(x\cos x)'(1+\sin x)-x\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x-x\sin x)(1+\sin x)-x\cos x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos x\sin x-x(\sin x+1)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x-x}{1+\sin x}.$$

Back

例6. 已知 $g(x)$ 在 $U(0,\delta)$内连续, $g(0)=a$, 求$f(x)=xg(x)$ 在$x=0$处的导数.

解:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg(x)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}g(x)$$

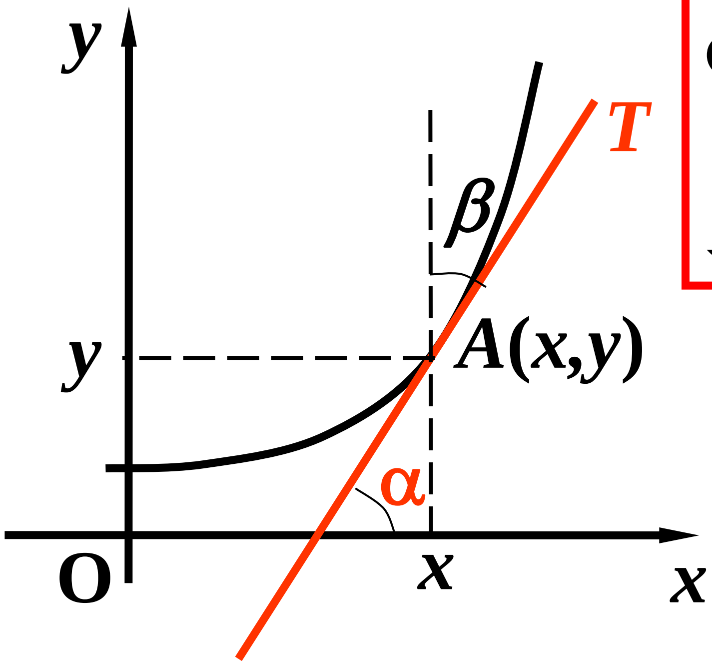
$$=g(0)=a.$$

Back

二、反函数的求导法则

β 是 $x=f(y)$ 的图形与y 轴正向的夹角.

$$\tan\beta = f'(y)$$



α 是 $y=\varphi(x)$ 的图形与x 轴正向的夹角.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

若 $y=\varphi(x)$ 的反函数 $x=f(y)$ 存在，则 $x=f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形相同，故 $x=f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 在点 $(x,\ y)$ 处的切线相同.

$$f'(y) = \tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$$

$$= \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\varphi'(x)}$$

$$(\varphi'(x) \neq 0\,)$$

反函数的导数是其直接函数导数的倒数.

定理2:

如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调可导,且$\varphi'(y)\neq 0$,

那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导,且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.\quad \text{或}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

证明: $\forall x\in I_x$,给x以增量$\Delta x(\Delta x\neq 0, x+\Delta x\in I_x)$

由$y=f(x)$的单调性可知,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$$

又$x=\varphi(y)$可导且$\varphi'(y)\neq 0$,

故$y=f(x)$连续,即$\Delta x\to 0$时$\Delta y\to 0$.

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

反函数的求导数习例

例6.设$y = \arcsin x$,求y'.

例7.设$y = \text{arccot}\, x$,求y'.

例8.设$y = \log_a x$,求y'.

例9.设$y = \text{arsh} x$,求y'.

例6.设$y=\arcsin x$,求y'.

解: $\because y=\arcsin x$,

则它是 $x=\sin y,\ y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$的反函数.

$$\frac{dx}{dy}=(\sin y)'=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$(\arccos x)'=(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Back

例7.设$y=\operatorname{arccot} x$,求$y'$.

解: $\because y=\operatorname{arccot} x$,

则它是$x=\cot y$, $y\in(0,\pi)$的反函数,

$$\frac{dx}{dy}=(\cot y)'=-\csc^2 y=-(1+\cot^2 y)=-(1+x^2).$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

即$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

$$(\arctan x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} x\right)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

例8.设$y=\log_a x$,求y'.

解: $\because y=\log_a x$ 是 $x=a^y$ 的反函数,

由反函数的求导法则得,

$$y'=(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\therefore (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Back

例9.设$y=\text{arsh}x$,求y'.

解: $\because y=\text{arsh}x$,

则 $x=\text{sh}y$.

$$(\text{arsh}x)'=\frac{1}{(\text{sh}y)'}=\frac{1}{\text{ch}y}$$

$$\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\text{sh}^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

三、复合函数的求导法则

定理3:

如果 (1)函数 $u=g(x)$在点 x可导,

(2)$y=f(u)$在对应的点$u=g(x)$可导,

则复合函数 $y=f[g(x)]$在点x可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x). \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

证明: $\because y=f(u)$ 在 u处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u)$, 其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$,

即 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$

从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, 且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$,

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

$$=f'(u)\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x).$$

y — u — v — x

注意: (1)定理3也称为链式法则, 可加以推广.

即若$y=f(u),u=g(v),v=h(x)$可导,则$y=f\{g[h(x)]\}$

可导,且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

关键: 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)g'(v)h'(x).$$

(2)利用复合函数的求导法则来解决求导问题时, 关键在于正确地把一个函数分解成几个简单函数, 而这些函数的导数是我们会求的.

而且在**熟练掌握**复合函数的分解后, 可**不必明显设出**中间变量.

复合函数求导数习例

例10.设$y=\arctan\frac{1}{x}$,求y'.

例11.设$y=\cos\frac{2x}{1+x^2}$,求y'.

例12.设$y=\ln\cos e^x$,求y'.

例13.设$y=x^x$,求y'.

例14.设$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$,求y'.

例15.设$y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,求$y'$.

例16.设$y=\ln(|x|)$,求y'.

例17.设$y=\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}$, $f(x)$可导,求y'.

例10.设$y = \arctan\frac{1}{x}$,求y'.

解: 设 $y = \arctan u$, $u = \frac{1}{x}$,

$$y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Back

例11.设$y=\cos\frac{2x}{1+x^2}$,求y'.

解: 设 $y=\cos u$, $u=\frac{2x}{1+x^2}$,

$$y'=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot u'=-\sin\frac{2x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=-\sin\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}\cdot\sin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Back

例12.设$y=\ln\cos e^{x}$,求y'.

即由外层向内层逐层求导的各层导数乘积的导数,对外层求导时其内层保持不变

解: $$y'=(\ln\cos e^{x})'$$

$$=\frac{1}{\cos e^{x}}(\cos e^{x})'$$

$$=\frac{1}{\cos e^{x}}(-\sin e^{x})(e^{x})'$$

$$=-e^{x}\tan e^{x}$$

Back

例13.设$y = x^x$,求y'.

解: $\because x^x = e^{x\ln x}$

$\therefore y' = (x^x)' = (e^{x\ln x})'$

$= e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$

Back

例14. 设$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求y'.

解：

$$y'=\left(e^{\sin^2\frac{1}{x}}\right)'=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\sin\frac{2}{x}$$

例15.设$y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,求$y'$.

解:

$$y' = \left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'$$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{x}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Back

例16.设$y=\ln(|x|)$，求y'.

证：$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

当$x>0$时，$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

当$x<0$时，$y'=(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x}.$

综上所述：$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}.$

Back

例17.设$y=\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}$, $f(x)$可导,求y'.

解:

$$y'=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}}\left\{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]\right\}'$$

$$=\frac{2f(\sin x)\cdot[f(\sin x)]'+2\sin[f(x)]\cdot[\sin[f(x)]]'}{2\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}}$$

$$=\frac{f(\sin x)\cdot f'(\sin x)\cdot\cos x+2\sin[f(x)]\cdot\cos[f(x)]\cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(\sin x)+\sin^2[f(x)]}}$$

** 设$y=f(x)$可导，写出下列函数关于x的导数

1) $y=\sin f(x)$ $y'=\cos f(x)\cdot f'(x)$

2) $y=e^{f(x)}$ $y'=e^{f(x)}f'(x)$

3) $y=\ln f(x)$ $(f(x)>0)$ $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4) $y=f(\sin x)$ $y'=f'(\sin x)\cos x$

5) $y=f(e^x)$ $y'=f'(e^x)e^x$

6) $y=f(\ln x)$ $y'=f'(\ln x)\dfrac{1}{x}.$

四、熟记基本初等函数的导数公式

1.基本初等函数的导数公式

$(1)(C)'=0$　　$(2)(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

$(3)(\sin x)'=\cos x$　　$(4)(\cos x)'=-\sin x$

$(5)(\tan x)'=\sec^2 x$　　$(6)(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(7)(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$(8)(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(9)(a^x)'=a^x\ln a$　　$(10)(e^x)'=e^x$

$(11)(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　$(12)(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(13)(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(14)(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(15)(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (16)(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(17)(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (18)\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

2.导数的运算法则

$$(1)\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$(2)\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$(3)\left[Cu(x)\right]' = Cu'(x)$$

$$(4)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0)$$

$$(5)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \qquad \left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$(6)\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(y)}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

初等函数求导数的习例

例18. 设$y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$,求$\dfrac{dx}{dy}$.

例19. 设$y=x^3+3^x+3^3+x^x$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

例20. 设$y=\ln\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

例21. 设$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在$x=a$处连续,

求$f'(a)$。

例22. 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求$f'(0)$.

例18.设$y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$,求$\dfrac{dx}{dy}$.

解:

$$\because \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(x+\sqrt{a^2+x^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot(a^2+x^2)'\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\sqrt{a^2+x^2}.$$

例19.设$y=x^3+3^x+3^3+x^x$,求$\frac{dy}{dx}$.

解: $\because y=x^3+3^x+3^3+e^{x\ln x}$,

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2+3^x\ln 3+0+e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'$$

$$=3x^2+3^x\ln 3+e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$=3x^2+3^x\ln 3+e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1).$$

例20.设$y=\ln\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解:

$$\because\ y=\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4),$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}.$$

求函数$y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$的导数.

Back

例21. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$

因 $f'(x) = \varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$ ✗

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

Back

例22. 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!$$

Back

内容小结

导数的四则运算法则

反函数的求导法则（注意成立条件）；

复合函数的求导法则

（注意函数的复合过程,合理分解正确使用链导法）；

已能求导的函数:可分解成基本初等函数,或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

思考题： 习题2.1第1题（6）到（9）

思考题参考答案

课堂练习：习题2.1第2题（10）（11）（12）、第10题

练习参考答案