高等数学A

第1章 函数与极限

1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限的概念　1.3.2 函数极限的性质

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.3 函数的极限

函数极限

- **1.3.1 函数极限的概念**
  - 自变量趋于无穷大时函数的极限及习例1-3
  - 自变量趋于有限值时函数的极限
  - 函数极限的几何解释
- 用定义验证函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$
  - 步骤
  - 习例4-8
- 函数单侧极限的定义
- **1.3.2 函数极限的性质**
  - 函数极限的唯一性
  - 收敛函数的局部有界性
  - 函数极限的局部保号性
  - 函数极限与数列极限的关系
- 证明极限不存在的方法

一、函数极限的概念

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

$|x| \to \infty$有三种情况:

(1) $x > 0$且$|x| \to \infty$, 记为$x \to +\infty$

(2) $x < 0$且$|x| \to \infty$, 记为$x \to -\infty$

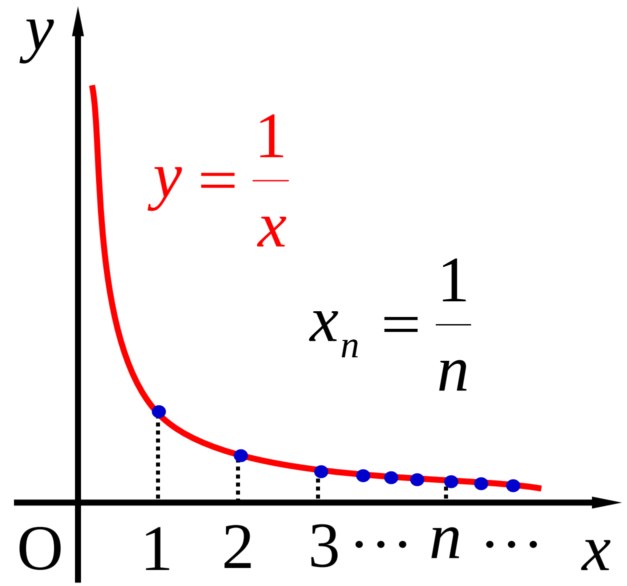
(3) x可正可负且$|x| \to \infty$, 记为$x \to \infty$

从数列$\{x_n\}$: $x_n = \dfrac{1}{n}$

与函数 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \in (0, +\infty))$

的图形可以看出:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$



如何描述它？

回忆数列$\{x_n\}$：$x_n=\dfrac{1}{n}$ 极限的定义：

$\forall\varepsilon>0$，若 $\exists N>0$，使当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$

成立，则称数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时，以a为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

数列是一种特殊的函数：$x_n=f(n)\quad n\in Z^+$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 相当，故可以从形式进行

推广，将 x_n 替换为 $f(x)$，n 替换为 x，N 替换为 X：

$\forall\varepsilon>0$，若 $\exists X>0$，使当$x>X$时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$

成立，则称函数 $f(x)$ 当$x\to+\infty$时，以a为极限，记为

好像没有问题.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a.$$

有问题没有？

定义1

设$f(x)$定义在$[a,+\infty)$上, A是一个确定的数,

若$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

则称A是$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限.记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

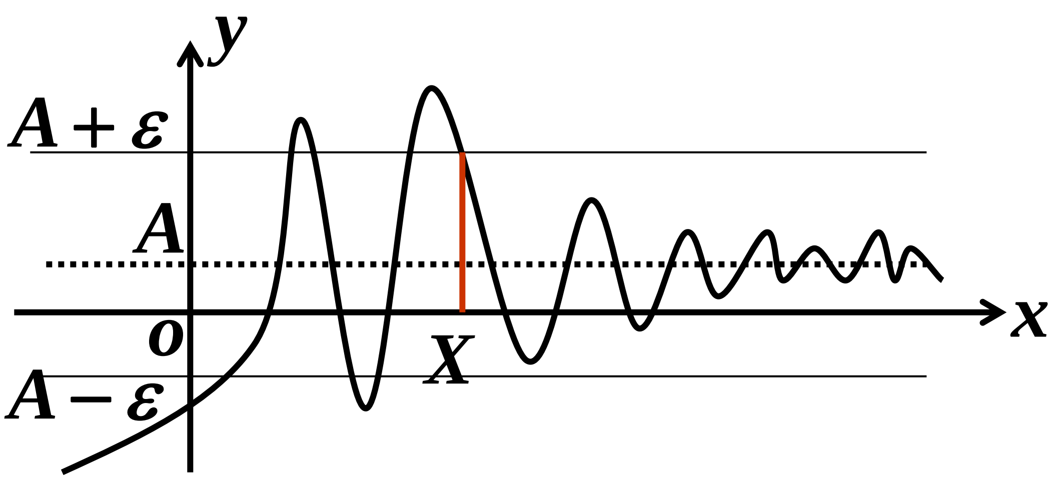
或 $f(x) \to A$(当$x \to +\infty$时)

注意:

(1)与数列极限情形相比较，X的作用与数列极限中的N一样，说明x充分大的程度，依赖于ε；所不同的是这里必须考虑比X大的所有实数，而不仅仅是自然数n.

(2)几何解释：当$x > X$时，$f(x)$的图形全部位于两直线

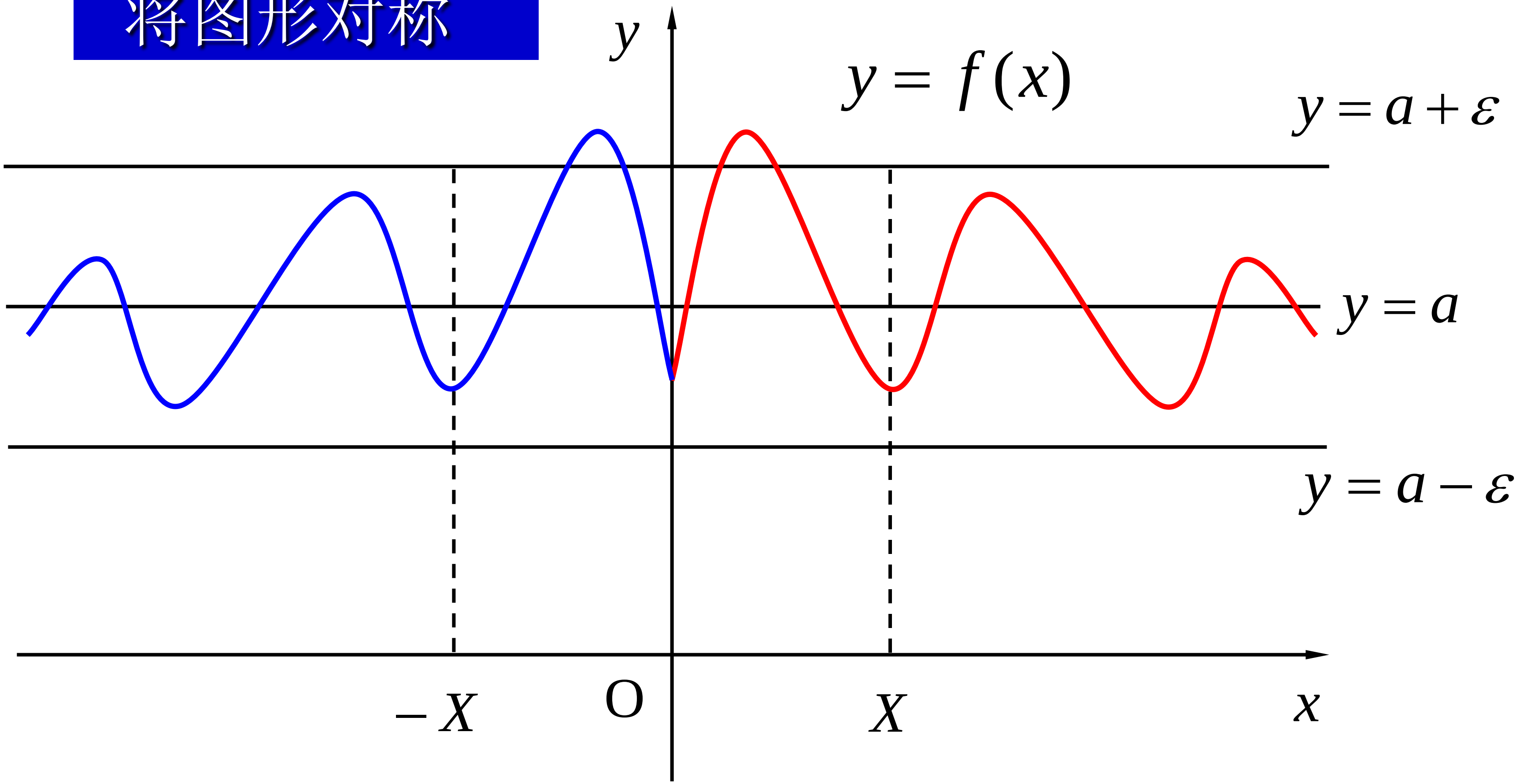
$$y = A - \varepsilon \text{与} y = A + \varepsilon \text{之间.}$$



(3)类似地可得出$x \to -\infty$与$x \to \infty$时的极限定义.

我们将得到$x\to-\infty$时，函数的极限.

将图形对称



将图形对称过去后，你有什么想法?

$x \to -\infty$时的极限定义:

设$f(x)$定义在$(-\infty, b]$上, A是一个确定的数,

若$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$x < -X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

则称A是$f(x)$当$x \to -\infty$时的极限.记为

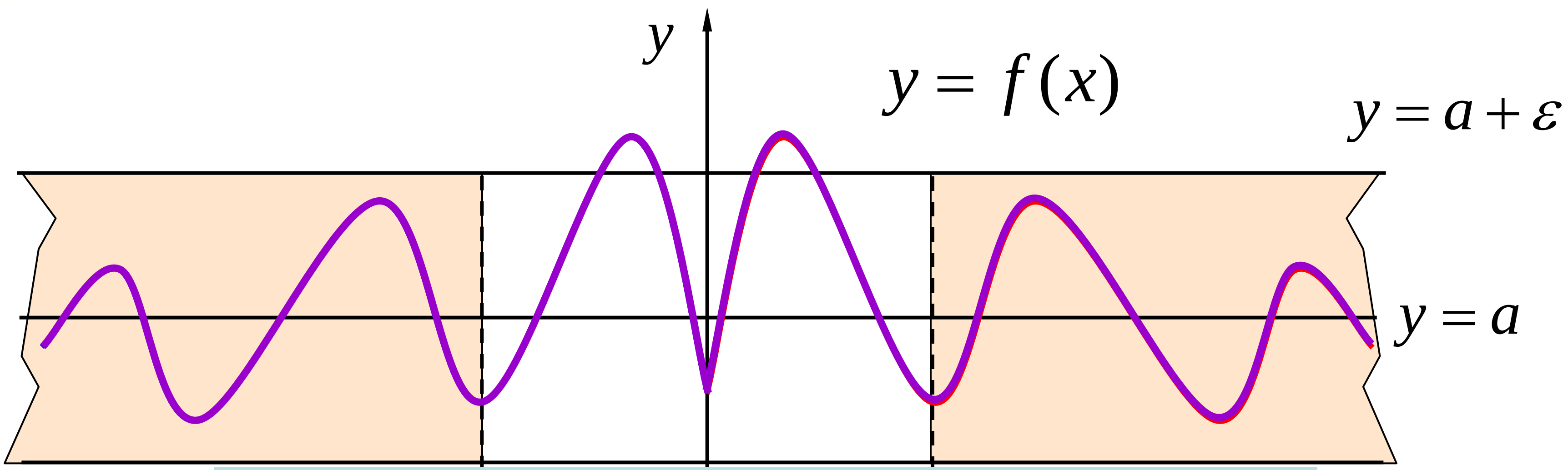
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

或 $f(x) \to A$(当$x \to -\infty$时)

结论:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

现在从整体上来看这个图形，你有什么想法?



你能否由此得出
一个极限的定义
和一个重要的定理.

$$|x| > X > 0 \Longleftrightarrow x > X \text{ 或 } x < -X$$

$x \to \infty$时的极限定义:

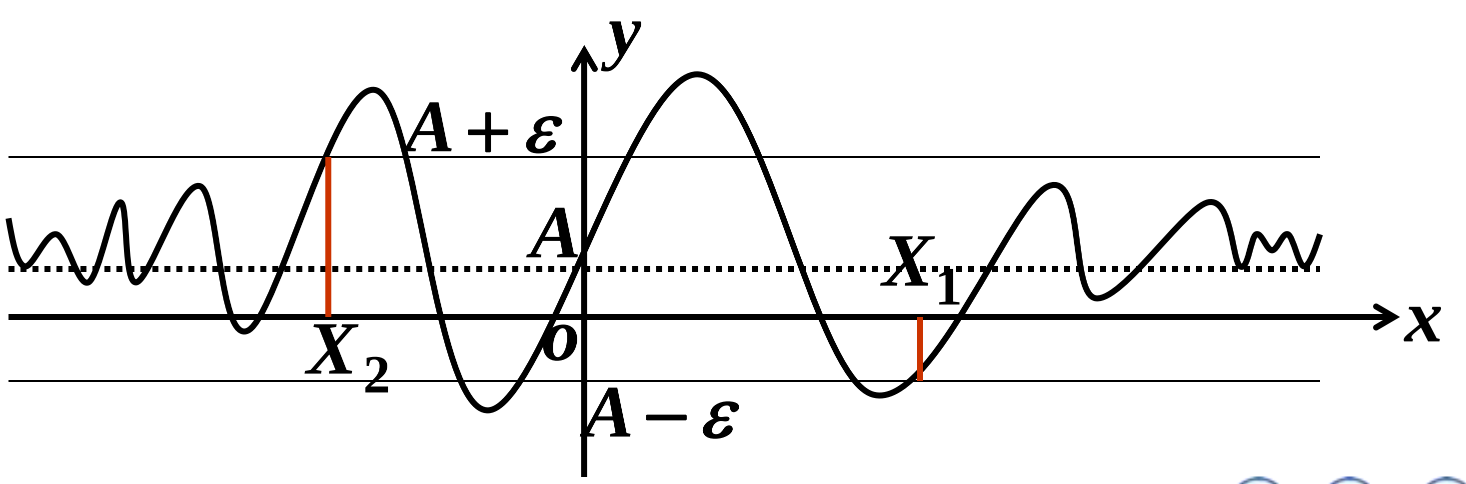
设$f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上, A是一个确定的数,

若$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当$|x| > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

则称A是$f(x)$当$x \to \infty$时的极限.记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

或 $f(x) \to A$(当$x \to \infty$时)



由于 $|x|>X>0 \iff x>X$ 或 $x<-X$,

所以, x 按绝对值无限增大时,

既包含了 $x\to+\infty$,

又包含了 $x\to-\infty$ 的情形.

定理

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

由绝对值关系式:

$$|x| > X \iff x > X \text{ 或 } x < -X \quad (X > 0)$$

及极限的三个定义即可证明该定理.

ε-X语言证明 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$

$1. |f(x)-A| \le \varphi(|x|)$

$2. \forall \varepsilon > 0$要使$|f(x)-A| < \varepsilon$成立,

即$\varphi(|x|) < \varepsilon$成立, 推出$|x| > \phi(\varepsilon)$

$4.$取$X = \phi(\varepsilon)$ **(关键:技巧是适当地放大不等式)**

$5.$当$x > X$时,$|f(x)-A| < \varepsilon$成立.

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$使当$|x| > X$时,恒有$|f(x)-A| < \varepsilon.$

$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = A$

自变量趋于无穷大时函数的极限举例:

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

例2. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证明: $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{x},$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$

只要 $\dfrac{1}{x}<\varepsilon,$ 即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon},$

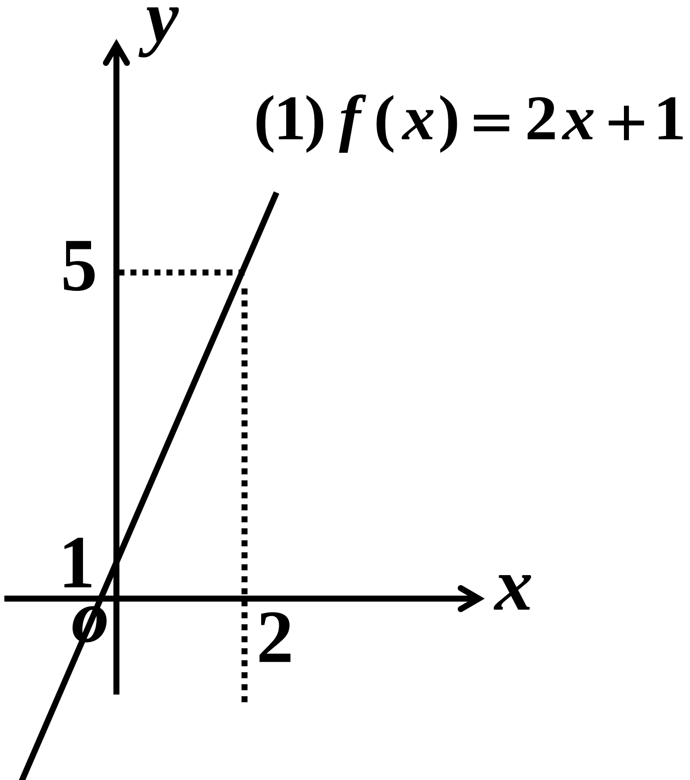
取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 当 $x>X$ 时, 有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

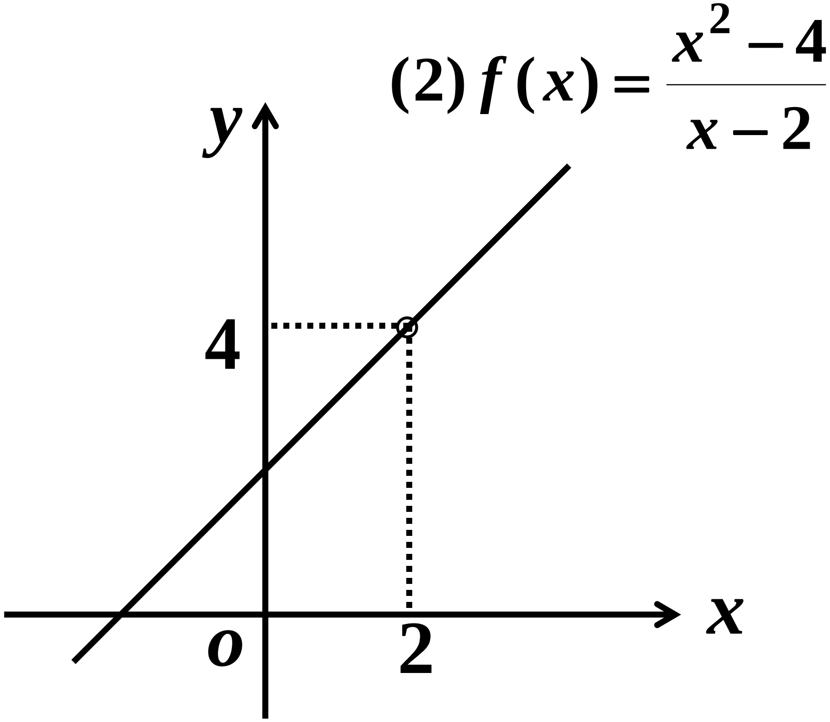
同样可证, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0.$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

实例分析



当$x\to 2$时$f(x)\to 5$



当$x\to 2$时$f(x)\to 4$

两实例归结为'$x\to x_0$(但不等于x_0)时$f(x)\to A$(常数)"

这两个“趋于”反映了$f(x)$与A和x与x_0无限接近程度之间的联系.

$f(x) \to A$,即$f(x)$与A的距离可任意小,

引入任意小的正数ε,用$|f(x)-A|<\varepsilon$来描述.

$x \to x_0$,即x与x_0的距离可任意小,但$x \neq x_0$

引入任意小的正数δ,用$0<|x-x_0|<\delta$来描述.

并非对所有的x都有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,

而只有当$0<|x-x_0|<\delta$时才有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立.

即要使$|f(x)-A|<\varepsilon$必须有$|x-x_0|<\delta$,

说明δ随着ε的指定而确定，有时也记为$\delta(\varepsilon)$.

定义2 函数极限的精确定义,即 $(\varepsilon-\delta)$定义

设$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义，A是一个确定的常数.

若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,

则称A是当$x\to x_0$时$f(x)$的极限.记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

或 $f(x)\to A$(当$x\to x_0$时)

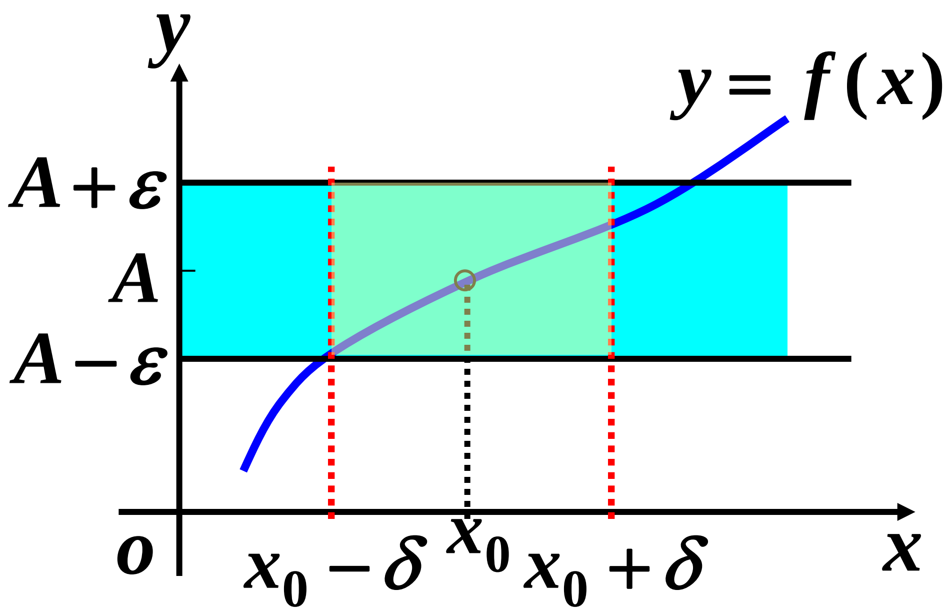
注意：(1)δ依赖于ε，但不是由ε唯一确定，

如取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$可以,则取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3},\dfrac{\varepsilon}{4}$等也可以.

(2)函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关.

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何解释

当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,



当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.

显然,找到一个δ后,δ越小越好.

用定义验证函数极限的步骤:

(1)通过计算或估计得

(有时要事先给出某个限制不等式$|x-x_0|<\delta_1$)

$|f(x)-A|\le g(|x-x_0|)$ 是$|x-x_0|$的简单函数式

(2)$\forall\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$,

只要$g(|x-x_0|)<\varepsilon$,

解得 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$,

取$\delta=\varphi(\varepsilon)$或$\delta=\min\{\varphi(\varepsilon),\delta_1\}$.

当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3)得出结论.

用定义验证函数极限习例4-8

例4. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5.$

例5. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

例6. 证明:当$x_0>0$时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$

例7. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3.$

例8. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

例4. 证明 $\lim\limits_{x \to 2}(2x+1)=5.$

证明: $\because \left|f(x)-A\right| = \left|2x+1-5\right| = 2\left|x-2\right|,$

$\forall \varepsilon > 0,$ 要使 $\left|f(x)-A\right| < \varepsilon,$

只要 $2\left|x-2\right| < \varepsilon,$ 即 $\left|x-2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2},$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2},$

当 $0 < \left|x-2\right| < \delta,$ 有 $\left|2x+1-5\right| < \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2}(2x+1)=5.$

Back

例5. 证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

证明: 尽管$f(x)$在$x=2$处没有意义，但函数当$x\to 2$时极限存在与否与它无关.

$$\because \left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=\left|x-2\right|,$$

$\forall\varepsilon>0,$ 要使 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$

只要 $\left|x-2\right|<\varepsilon,$

取 $\delta=\varepsilon,$

当$0<\left|x-2\right|<\delta$时,则有$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon.$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Back

例6. 证明：当$x_0 > 0$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证明：$\because x \to x_0$，不妨设 $|x - x_0| < x_0$，即$0 < x < 2x_0$.

$$|f(x)-A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

$\forall \varepsilon > 0$，要使 $|f(x)-A| < \varepsilon$，

只要 $\left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x_0}}\right| < \varepsilon$， 即$|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$，

取 $\delta = \min\{\sqrt{x_0}\varepsilon, x_0\}$，

当$0 < |x - x_0| < \delta$时，则有$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$.

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

例7. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3.$

证明: $\because x\to 1$, 不妨设 $|x-1|<1$, 得 $0<x<2$ 但 $x\neq 1$.

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=\left|x^2+x-2\right|=\left|x+2\right|\left|x-1\right|$$

$$\leq(|x|+2)|x-1|<4|x-1|$$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$,

只要 $4|x-1|<\varepsilon$, 即 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$,

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4},1\right\}$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 则有 $\left|\dfrac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3.$

Back

例8. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$

证明: $|f(x)-A| = |\cos x - 1| = \left|2\sin^2\frac{x}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|x|^2}{4} = \frac{|x|^2}{2},$

$\forall \varepsilon > 0,$ 要使 $|f(x)-A| < \varepsilon,$

只要 $\frac{|x|^2}{2} < \varepsilon,$ 即 $|x-0| < \sqrt{2\varepsilon},$

取 $\delta = \sqrt{2\varepsilon},$

当 $0 < |x-0| < \delta$ 时, 则有 $|\cos x - 1| < \varepsilon.$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1.$

Back

函数单侧极限

函数单侧极限的描述定义

从 x_0 的左侧($x < x_0$)趋于x_0时函数的极限称为左极限.

记为 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

从 x_0 的右侧($x > x_0$)趋于x_0时函数的极限称为右极限.

记为 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

函数单侧极限精确定义

(1) 若$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当$x_0 - \delta < x < x_0$时都有

$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.则称$A$为$f(x)$当$x \to x_0$的左极限.

(2) 若$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当$x_0 < x < x_0 + \delta$时都有

$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.则称$A$为$f(x)$当$x \to x_0$的右极限.

注意: (1)左右极限统称为单侧极限.

(2)通常在考虑区间端点的极限与分段函数分段点处的极限时碰到左右极限问题.

(3)对于区间的左端点只求右极限，右端点只求左极限.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A.$

例9 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, x<0, \\ 0, x=0, \\ x+1, x>0. \end{cases}$ 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

证明: 容易证明当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

而右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

可见 $f(x)$ 在0处的左、右极限存在但不相等，

所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

二、函数极限的性质

1. 函数极限的唯一性

定理1（唯一性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限唯一.

2. 函数极限的局部有界性

定理2（局部有界性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则$\exists M>0$和$\delta>0$,

对于一切$x\in U(\tilde{x}_0,\delta)=\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$,

都有 $|f(x)|\le M$.

证明： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

$\therefore$对于$\varepsilon=1$,

$\exists\delta>0$,当$x\in U(\tilde{x}_0,\delta)$时,有$|f(x)-A|<1$,

故 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|\le 1+|A|\overset{\Delta}{=}M$

3. 函数极限的局部保号性

定理 3 （局部保号性）

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则$\exists\ \delta > 0$,

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$时，有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

证明： 就 $A>0$ 的情形加以证明.

$$\because \lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

则取 $\varepsilon \le A$, 必$\exists \delta > 0$,

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

即 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$,

$\therefore f(x) > 0$.

类似地可证$A < 0$的情形,此时取 $\varepsilon \le -A$.

推论1（局部保号性）

若在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$内 $f(x)\ge 0$(或 $f(x)\le 0$), 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

则 $A\ge 0$(或 $A\le 0$).

推论2（局部保序性）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,

若$\exists\delta>0$, 当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, $f(x)\ge g(x)$, 则$A\ge B$.

证明： 假设 $A<B$, 取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$.

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

$\exists\delta_1>0$, 当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$时, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{B-A}{2}$,

即 $\dfrac{3A-B}{2} < f(x) < \dfrac{A+B}{2}$.

$\because \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,

$\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in U(\tilde{x}_0, \delta_2)$时, 有 $|g(x) - B| < \dfrac{B-A}{2}$,

即 $\dfrac{A+B}{2} < g(x) < \dfrac{3B-A}{2}$.

取 $\hat{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta\}$,

当 $x \in U(\tilde{x}_0, \hat{\delta})$时, 有 $f(x) < \dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} < \mathrm{g}(x)$,

与已知条件矛盾.

$\therefore A \geq B$.

4. 函数极限与数列极限的关系

定理 4（函数极限与数列极限的关系）

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, $\{x_n\}$为 $f(x)$ 函数的定义域内任一收敛于 x_0的数列, 且满足 $x_n \neq x_0\left(n\in\mathbf{N}^+\right)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛,

且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

证明: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ， 则 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ， 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对 $\delta>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^+$,当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$.

由假设 $x_n\neq x_0\left(n\in\mathbf{N}^+\right)$, 故当 $n>N$ 时, 从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证明极限不存在的方法

(1)利用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A.$

例10. 设 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1\\ 2, & x=1\\ 2x+1, & x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解: $\because\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3,$

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-1)=2,$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

(2)利用极限存在的唯一性或函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在且相等.

例11. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

证明: 取 $x_n = 2n\pi$, 当 $n\to\infty$时, $x_n\to\infty$.

取 $y_n = 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 当 $n\to\infty$时, $y_n\to\infty$.

但 $f(x_n)=\sin(2n\pi)=0$,

$f(y_n)=\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=1$.

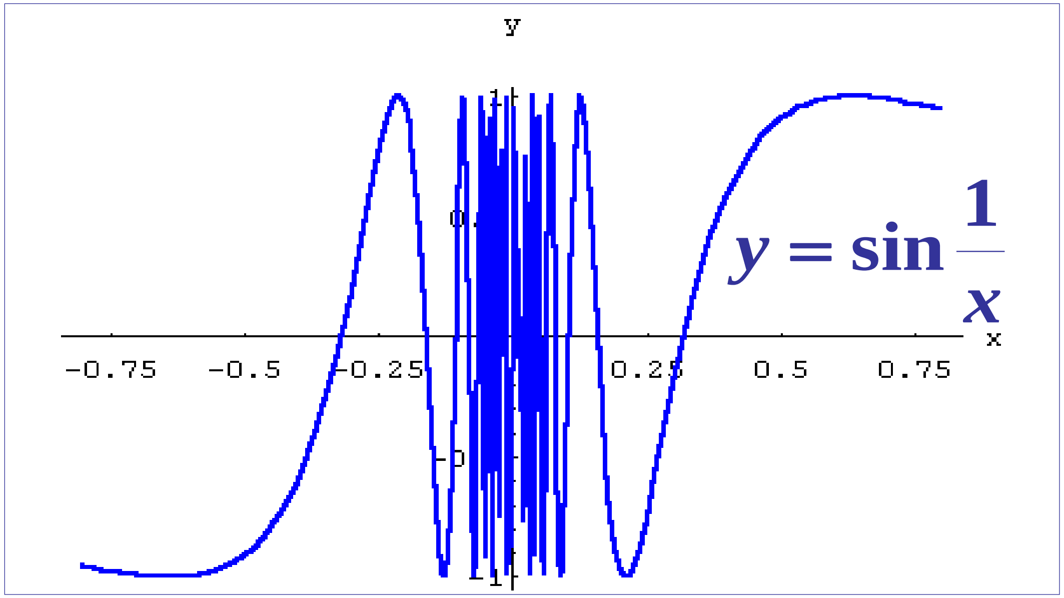
$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

说明：极限不存在有几种情况：

1)左极限≠右极限

2) ∞ (如 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$)

3)摆动(如：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$)



练习：讨论 $x \to 0$ 时，下列函数的极限的是否存在.

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2x+1, & x>0 \end{cases}$$

四、小结

1. 函数极限的"$\varepsilon-\delta$" 或"$\varepsilon-X$" 定义及应用

2. 函数极限的性质:保号性定理

与左右极限等价定理

2.2　函数的极限

一、填空：

1．极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 的定义是：对于 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 0<$\underline{\quad x_0-x \quad}$<$\delta$ 时

$|f(x)-A|<\varepsilon$．

2．极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义是： 对于 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $\underline{\quad x<-X \quad}$ 时

$|f(x)-A|<\varepsilon$．

3．对于任意的正数 ε，存在正数 $\delta =$________，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

$|(3x+1)-4|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)=4$．

4. 对于任意正数 ε，存在正数 $\delta =$________，当 $0<$________$<\delta$ 时，$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$．

解: $|(3x+1)-4|=3|x-1|<\varepsilon,$ 可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$

$\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|=|x+2|<\varepsilon$ 可取 $\delta=\varepsilon$

作业提示：五　　Show that $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

分析: 要使 $|x^2-4| = |x-2||x+2| < \varepsilon$,

不易解出 $|x-x_0| < \phi(\varepsilon)$, 多了 $|x+2|$,

可先限制 x 在 $x_0 = 2$ 的一个小范围内

证：不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，从而 $|x^2-4| = |x-2|\cdot|x+2| < 5|x-2|$，$\forall\varepsilon>0$，

要使 $|x^2-4| < 5|x-2| < \varepsilon$，只要 $|x-2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. 于是取 $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$，则当

$0<|x-2|<\delta$ 时，就有 $|x^2-4|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.