同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§8.4 若当标准形

定义. 称矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

为若当块, 记为$J(\lambda_0, n)$. 称矩阵

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & & & \\ & J(\lambda_2, n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s, n_s) \end{pmatrix}$$

为若当标准形.

注意. 若当标准形是一个下三角矩阵, 也有用它的转置定义若当块和若当标准形.

例. 求若当标准形

$$J=\begin{pmatrix} J(\lambda_1,n_1) & & & \\ & J(\lambda_2,n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s,n_s) \end{pmatrix}$$

的初等因子.

解. 对于$i=1,2,\cdots,s$,

$$|\lambda E_{n_i}-J(\lambda_i,n_i)|=\begin{vmatrix} \lambda-\lambda_i & & & & \\ -1 & \lambda-\lambda_i & & & \\ & -1 & \lambda-\lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda-\lambda_i \end{vmatrix}_{n_i\times n_i}=(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$$

而且$\lambda E_{n_i}-J(\lambda_i,n_i)$有一个$n_i-1$阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda-\lambda_i & & & \\ & -1 & \lambda-\lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda-\lambda_i \\ & & & & -1 \end{vmatrix}_{n_i-1\times n_i-1}=(-1)^{n_i-1}$$

因此$J(\lambda_i,n_i)$的行列式因子组:

$$D_{n_i}^{(i)}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i},D_{n_i-1}^{(i)}(\lambda)=\cdots=D_1^{(i)}(\lambda)=1$$

$J(\lambda_i,n_i)$不变因子组:

$$d_{n_i}^{(i)}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i},d_{n_i-1}^{(i)}(\lambda)=\cdots=d_1^{(i)}(\lambda)=1$$

于是

$$\lambda E_{n_i}-J(\lambda_i,n_i)\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&d_{n_i}^{(i)}(\lambda)\end{pmatrix}=\Lambda_i$$

由此推出

$$\lambda E-J=\begin{pmatrix}\lambda E_{n_1}-J(\lambda_1,n_1)&&&\\&\lambda E_{n_2}-J(\lambda_2,n_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda E_{n_s}-J(\lambda_s,n_s)\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}\Lambda_1&&&\\&\Lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\Lambda_s\end{pmatrix}$$

所以J的初等因子组:

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

定理. 每个n阶的复数矩阵A都相似一个若当标准形，而且若当标准形除若当块的排列次序外是由矩阵A唯一决定的.

证明. 设n阶矩阵A的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

注意若当标准形

$$J=\mathrm{diag}J(\lambda_1,k_1),J(\lambda_2,k_2),\cdots,J(\lambda_s,k_s)$$

的初等因子组也是

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

所以$A\sim J$.

如果另外还有一个若当标准形J'与A相似，那么J'与A有相同的初等因子，而若当标准形中的块有初等因子唯一确定，因此J' 与J除了其中若当块排列的次序外是相同的.

上面定理的线性变换的语言就是

定理. 设T是复数域上n维性空间V的线性变换, 则在V中存在一个有序基, 使得T在这个有序基下矩阵是若当标准形,, 并且这个若当标准形除去其中若当块的排列次序外是被T唯一决定的.

证明. 在V中任取一个基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 令$T$在这组基下的矩阵是$A$, 由于$A$相似于若当标准形, 所以存在可逆阵$P$, 使$P^{-1}AP$为若当标准形, 设

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$$

于是线性变换T在基$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$下的阵就是$P^{-1}AP$ 若当标准形, 而且这样的若当标准形除去其中若当块的排列次序外是唯一的.

由于1阶若当块$J(\lambda_0, 1) = \lambda_0$, 所以对角阵是若当标准形的特殊情形

推论. 复数矩阵A与对角阵相似的充分必要条件A的初等因子都是一次的.

例. 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

(1) 求矩阵A的若当标准形J
(2) 求矩阵P, 使得$P^{-1}AP=J$

解. 计算A的特征多项式.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

由于

$$(A-E)(A-2E)=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

所以$m_A(\lambda)=\Delta_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ 有重根, 因此A 不可对角化. 所以A的初等因子是$(\lambda-1)^2$, $\lambda-2$, A的若当标准形是

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

再设$P=(X_1,X_2,X_3)$, 则由$AP=PJ$推出

$$(AX_1,AX_2,AX_3)=(2X_1,X_2+X_3,X_3)$$

所以X_1,X_3分别是A属于2和1的特征向量, X_2 是满足方程$(\lambda_2E-A)X=-X_3$的解.
解齐次线性方程组

$$(2E-A)X=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ 得X_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

解齐次线性方程组

$$(E-A)X=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ 得X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

解非齐次线性方程组

$$(E-A)X=-X_3,\ \begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ 得X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

于是$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

例. 求

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix}$$

的若当标准形, 并求过渡矩阵P, 使$P^{-1}AP=J$.

解.

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\&\lambda-1&-2&-3\\&&\lambda-1&-2\\&&&\lambda-1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&(\lambda-1)^4\end{pmatrix}$$

于是

$$A\sim\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\end{pmatrix}=J$$

设$P=(X_1,X_2,X_3,X_4)$, 由$P^{-1}AP=J$, 得

$$A(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)J$$

于是

$$AX_1=X_1+X_2, AX_2=X_2+X_3, AX_3=X_3+X_4, AX_4=X_4$$

得

$$\begin{gathered}(E-A)X_1=-X_2\\(E-A)X_2=-X_3\\(E-A)X_3=-X_4\\(E-A)X_4=0\end{gathered}$$

解齐次线性方程组

$$(E-A)X=0,\ 得X_4=\begin{pmatrix}8\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解非齐次线性方程组

$$(E-A)X=-X_4,\ 得X_3=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix}$$

解非齐次线性方程组

$$(E-A)X=-X_3,\ 得X_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

解非齐次线性方程组

$$(E-A)X=-X_2,\ 得X_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

因此所求的

$$P=\begin{pmatrix}0&0&4&8\\1&-1&4&0\\-2&2&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

例. 设

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$$

(1) 求矩阵A的若当标准形J
(2) 求矩阵P, 使得$P^{-1}AP=J$

解. 首先求$\lambda E-A$的初等因子

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}\lambda+1&2&-6\\1&\lambda&-3\\1&1&\lambda-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-(\lambda+1)r_3}\begin{pmatrix}0&-\lambda+1&-\lambda^2+3\lambda-2\\0&\lambda-1&-\lambda+1\\1&1&\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2-c_1,c_3-(\lambda-4)c_1]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&-\lambda+1\\0&-\lambda+1&-\lambda^2+3\lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&-\lambda+1\\0&0&-\lambda^2+2\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)r_3]{c_3+c_2}\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda-1&\\&&(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$$

因此A的初等因子是$\lambda-1,(\lambda-1)^2$, A的若当标准形是

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

再设$P=(X_1,X_2,X_3)$, 则由$AP=PJ$推出

$$(AX_1,AX_2,AX_3)=(X_1,X_2+X_3,X_3)$$

所以X_1,X_3是A属于1的特征向量, X_2 是满足方程$(\lambda_2E-A)X=-X_3$的解.
解方阵组$(E-A)X=0$, 得$\alpha=(-1,1,0)^t$, $\beta=(3,0,1)^t$,
设

$$X_3=k_1\alpha+k_2\beta=(-k_1+3k_2,k_1,k_2)^t$$

由于X_2 是方程$(\lambda_2E-A)X=-X_3$的解, 所以方程$(E-A)X=-X_3$有解, 所以这个方程的系数矩阵的秩与这个方程的增广矩阵的秩相等, 对增广矩阵进行初等行变换化为简化阶梯阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & k_1-3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_1-k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_1-k_2 \end{pmatrix}$$

$k_1=1, k_2=1$, 得

$$X_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解方程$(E-A)X=-X_3$得$X_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 取$X_1=\alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 于是$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

练习. 习题8.4:1,2,7.