同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§8.3 初等因子

定义. 把矩阵A或者线性变换T的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数记算)称为矩阵A或者线性变换T的初等因子.

例. 设12阶矩阵的不变因子是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9\text{个}},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$$

按定义, 它的初等因子有7个, 即

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2$$

其中$(\lambda-1)^2$出现三次, $(\lambda+1)$出现两次.

不变因子和初等因子的关系:

如果方阵A的不变因子为$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 将$d_i(\lambda)$ 分解成互不相同的一次因子方幂的乘积

$$\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{1r}} \\
d_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{2r}} \\
\cdots\quad & \quad\cdots \\
d_n(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{n1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{n2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{nr}}
\end{aligned}$$

则所有$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}(k_{ij}\geq 1)$ 就是A的全部初等因子.

注意不变因子满足

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda) \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

从而

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}|(\lambda-\lambda_j)^{k_{i+1,j}} \quad (i=1,2,\cdots,n-1; j=1,2,\cdots,r)$$

因此, 在$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$的分解式子中, 属于同一个一次因式的方幂的指数满足

$$0\leq k_{1j}\leq k_{2j}\leq\cdots\leq k_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,r)$$

这说明, 同一个一次因式的方幂作成的初等因子中, 方次最高的必定出现在$d_n(\lambda)$的分解中, 方次次高的必定出现在$d_{n-1}(\lambda)$的分解中, 如此顺推下去, 可知属于同一个一次因式的方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的位置是唯一确定的.

用矩阵的初等因子和矩阵的阶数求不变因子的方法:

设一个n阶方阵的全部初等因子为已知, 在所有初等因子中将同一个一次因式$(\lambda-\lambda_j)(j=1,2,\cdots,r)$的方幂的那些初等因子按降幂排列, 而且当这些初等因子的个数不足n时, 就在后面补上适当个数的1, 凑成n个. 设所得排列为

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{nj}},(\lambda-\lambda_j)^{k_{n-1,j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}}\quad(j=1,2,\cdots,r)$$

于是令

$$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}}\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

则$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$就是$A$的不变因子.

说明. 上面的讨论说明初等因子是由不变因子唯一确定的, 反之不变因也是由初等因子唯一确定的

定理. 两个同阶矩阵相似的充分必要条件它们有相同的初等因子.

说明. 初等因子和不变因子都是矩阵的相似不变量. 后面将看到在一般情况下初等因子的求法要比不变因子的求法方便一些.

练习. 习题8.3:2, 3.

引理. 如果多项式$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda), g_2(\lambda)$互素, 则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

证明. 设

$$d(\lambda) = (f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)), d_1(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda)), d_2(\lambda) = (g_1(\lambda), g_2(\lambda))$$

则$d_1(\lambda)|d(\lambda)$, $d_2(\lambda)|d(\lambda)$, 由$(f_1(\lambda), g_1(\lambda)) = 1$推出$(d_1(\lambda), d_2(\lambda)) = 1$, 因此$d_1(\lambda)d_2(\lambda)|d(\lambda)$.

另一方面, 由于$d(\lambda)|f_1(\lambda)g_1(\lambda)$, 可令$d(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, 其中, $f(\lambda)|f_1(\lambda)$, $g(\lambda)|g_1(\lambda)$. 由于$(f_1(\lambda), g_2(\lambda)) = 1$, 因而$(f(\lambda), g_2(\lambda)) = 1$. 由$f(\lambda)|f_2(\lambda)g_2(\lambda)$, 又得$f(\lambda)|f_2(\lambda)$, 因而$f(\lambda)|d_1(\lambda)$. 同样可以证明$g(\lambda)|d_2(\lambda)$. 所以$d(\lambda)|d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. 由于$d(\lambda)$和$d_1(\lambda)d_2(\lambda)$都是首项系数为1的多项式, 所以$d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$.

引理. 设

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

如果多项式$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与$g_1(\lambda), g_2(\lambda)$互素, 则$A(\lambda)$和$B(\lambda)$等价.

证明: $A(\lambda)$和$B(\lambda)$有相同的2阶行列式因子

$$f_1(\lambda)g_1(\lambda)f_2(\lambda)g_2(\lambda)$$

$A(\lambda)$ 和$B(\lambda)$的1阶行列式因子分别为

$$d(\lambda) = (f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) \quad 和 \quad \overline{d}(x) = (f_2(\lambda)g_1(\lambda), f_1(\lambda)g_2(\lambda))$$

由于$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与$g_1(\lambda), g_2(\lambda)$互素, 所以$d(\lambda) = \overline{d}(\lambda)$, 即, $A(\lambda)$和$B(\lambda)$相同的1阶行列式因子, 所以$A(\lambda)$和$B(\lambda)$等价.

定理. 首先用初等变换化特征矩阵$\lambda E-A$为对角形, 然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是A 的全部初等因子.

证明. 设$\lambda E-A$已用初等变换化为对角形

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} h_1(\lambda) & & & \\ & h_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中每个$h_i(\lambda)$的最高项系数都为1, 将$h_i(\lambda)$分解成互不相同的一次因式方幂的乘积;

$$h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

我们要证明, 对每个相同的一次因式的方幂$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}(i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,r)$, 在$D(\lambda)$的主对角线上按升幂次序排列后, 得到的新对角阵$D_1(\lambda)$与$D(\lambda)$等价. 这时$D_1(\lambda)$就是$\lambda E-A$的标准形, 而且所有不为1的$(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$就是$A$的全部初等因子

为了方便起见, 先对$(\lambda-\lambda_1)$的方幂进行讨论, 令

$$g_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}(\lambda-\lambda_3)^{k_{i3}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda),\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

而且每个$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}$都与$g_j(\lambda)(j=1,2,\cdots,r)$互素.如果有相邻的一对指数$k_{i1}>k_{i+1,1}$, 则在$D(\lambda)$中将$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}$与$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}$对调位置, 而其余因式保持不动.前面的引理告诉我们,

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价.

由此推出

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}\ddots & & & \\ & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i,1}}g_i(\lambda) & & \\ & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+11}}g_{i+1}(\lambda) & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}\ddots & & & \\ & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}g_i(\lambda) & & \\ & & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_{i+1}(\lambda) & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}=D_2(\lambda)$$

然后对$D_2(\lambda)$ 再作如上的讨论, 如此继续进行下去, 直到对角线上元素所含$(\lambda-\lambda_1)$的方幂是按升幂次序排列为止.依次对$(\lambda-\lambda_2),\cdots,(\lambda-\lambda_r)$作同样处理, 最后便得到与$D(\lambda)$ 等价的对角矩阵$D_1(\lambda)$, 它的主对角线上所含每个相同的一次因式的方幂, 都是按升幂次序排列的.

例. 求λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

的初等因子组, 不变因子组, 行列式因子组.

解. 对λ-矩阵$A(\lambda)$进行初等变换

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\lambda) & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以A的初等因子组:$\lambda-1,\lambda$; 不变因子组:$1,1,(\lambda-1)\lambda$; 行列式因子组:$1,1,(\lambda-1)\lambda$.

例. 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的初等因子组, 不变因子组, 行列式因子组.

解. 对λ-矩阵$\lambda E - A$进行初等变换

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ -7 & \lambda-3 & -9 \\ 2 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ -7+(\lambda-3)^2 & 0 & -9+3(\lambda-3) \\ 2+\lambda-3 & 0 & \lambda-4+3 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7+(\lambda-3)^2+9-3(\lambda-3) & 0 & -9+3(\lambda-3) \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-5) & 3\lambda-18 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

所以A的初等因子组:$\lambda-1, \lambda-4, \lambda-5$; 不变因子组:$1, 1, (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5)$; 行列式因子组:$1, 1, (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5)$.

练习. 习题8.3:1(2)(3).