同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

第八章 λ-矩阵

§8.1 λ-矩阵及其标准形

定义. 设$f_{ij}(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda], (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$. 则矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) & \cdots & f_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ f_{m1}(\lambda) & f_{m2}(\lambda) & \cdots & f_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

称为数域$\mathbb{F}$上的λ-矩阵，简称为λ-矩阵记为$A(\lambda)_{m\times n}$或者$(f_{ij}(\lambda))_{m\times n}$，简记为$A(\lambda)$或者$(f_{ij}(\lambda))$. 设

$$t := \max\{\deg(f_{ij}(\lambda)) | i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n\}$$

称t为λ-矩阵$(f_{ij}(\lambda))$的次数.

注意. 数字矩阵是次数为零的λ-矩阵. 数字矩阵A的特征矩阵$\lambda E - A$是次数为1的λ-矩阵.

命题. 设$A(\lambda)$ 的次数为m的λ-矩阵. 则

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m,$$

其中A_i 为数字矩阵, $i=0,1,\cdots,m$.

证明. 可以对$A(\lambda)$ 的次数进行数学归纳证明, 我们将证明的细节留给同学们来完成.

例. 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2+3\lambda+1 & \lambda^3+\lambda & 2 \\ \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda^2-4 \\ 3 & 2\lambda^2 & 3\lambda^2 \\ \lambda+2 & 4\lambda & 3 \end{pmatrix}$$

则

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

定义. 设λ-矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 如果

$$a_{ij}(\lambda)=b_{ij}(\lambda),\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$相等, 记为$A(\lambda)=B(\lambda)$.

设λ-矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 令

$$c_{ij}(\lambda):=a_{ij}(\lambda)+b_{ij}(\lambda),\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则λ-矩阵$C(\lambda)=(c_{ij}(\lambda))_{m\times n}$称为$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的和, 记为$A(\lambda)+B(\lambda)$.

设λ-矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{n\times s}$, 令

$$c_{ij}(\lambda):=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\lambda)b_{kj}(\lambda),\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则λ-矩阵$C(\lambda)=(c_{ij}(\lambda))_{m\times n}$称为$A(\lambda)$与$B(\lambda)$相乘, 记为$A(\lambda)B(\lambda)$.

注意. λ-矩阵的相等, 相加, 相乘的定义与数字矩阵相等, 相加, 相乘的定义是相同的. 并且由于多项式运算(加法和乘法)与数字的运算(加法和乘法)有同样的规律, 所以λ-矩阵的运算与数字矩阵的运算有同样的规律.

与数字矩阵一样可以定义λ-矩阵的行列式, 子式等概念.

定义. $m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$中不等于零的子式的最大阶数r称为$A(\lambda)$的秩. 如果$A(\lambda)$ 没有不等于零多项式的子式, 则称$A(\lambda)$的秩为零.

根据定义直接得到

1. $A(\lambda)_{m\times n}$的秩$\le \min\{m,n\}$
2. $A(\lambda)$的秩$=0$当且仅当$A(\lambda)=0$

定义. 下面三种变换叫λ-矩阵的初等行(列)变换:

1. 交换λ-矩阵的两行(列)
2. 用一非零的常数c去乘λ-矩阵的某一行(列)
3. λ-矩阵的某一行(列)的$f(\lambda)$倍加到另一行(列)上去.

初等行变换和初等列变换统称初等变换.

下面的方阵称为初等方阵

$$P_{ij}=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

$$P_i(k)=\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& k &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
P(i(f(\lambda)),j)=\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \ddots &&& \\
&& f(\lambda) && 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}$$

命题. 对λ-矩阵$A(\lambda)$进行行(列)初等变换等于用相应的初等矩阵左乘(右乘)$A(\lambda)$.

定义. 设$A(\lambda)$为n阶λ-方阵, 如果存在n阶λ-方阵$B(\lambda)$使得

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$$

则称$A(\lambda)$ 为可逆的λ-矩阵, 称$B(\lambda)$ 为$A(\lambda)$的逆阵

注意. 如果$A(\lambda)$可逆, 则$A(\lambda)$的逆阵唯一, 我们将它记为$A^{-1}(\lambda)$.

定理. $A(\lambda)$可逆的充分必要条件$|A(\lambda)|$为一非零常数.

证明. (必要性)设$A(\lambda)$可逆, 则存在$B(\lambda)$, 使$A(\lambda)B(\lambda) = E$, 于是$|A(\lambda)||B(\lambda)| = 1$, 因$|A(\lambda)|$与$|B(\lambda)|$均为$\lambda$-的多项式, 它们的次数之和为0, 即$|A(\lambda)|$为非零常数.

(充分性) 如果$|A(\lambda)| = c \in \mathbb{F}, c \neq 0$. 令$A^*(\lambda)$为$A(\lambda)$的伴随矩阵, 由于$A^*(\lambda)$是$n$阶$\lambda$-矩阵,

$$(\frac{1}{c}A^*(\lambda))A(\lambda) = A(\lambda)(\frac{1}{c}A^*(\lambda)) = E$$

所以$A(\lambda)$ 可逆.

推论. 初等方阵是可逆的.

证明. 由于$|P_{ij}| = -1$, 所以P_{ij}可逆.
由于$|P(i(k))| = k$, 所以$P(i(k))$可逆.
由于$|P(i(f(\lambda)), j)| = 1$所以$P(i(f(\lambda)), j)$可逆.

练习. 习题8.1:1(2)(4)

定义. 如果$m\times n$的λ-矩阵$B(\lambda)$可由$m\times n$的λ- 矩阵$A(\lambda)$经有限次行或列的初等变换得到，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价.记为$A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$.

命题. λ-矩阵的等价是一种等价关系，即满足

1. 自反性: $A(\lambda)\leftrightarrow A(\lambda)$;
2. 对称性: 如果$A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$, 则$B(\lambda)\leftrightarrow A(\lambda)$;
3. 传递性: 如果$A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$, $B(\lambda)\leftrightarrow C(\lambda)$, 则$A(\lambda)\leftrightarrow C(\lambda)$.

证明. (留给同学们完成)

定义. 设$A(\lambda)$的秩为r, 对于正整数$k, 1 \le k \le r$, $A(\lambda)$中所有k阶子式的首项系为1的最高公因式称为$A(\lambda)$的k阶行列式因子, 记为$D_k(\lambda)$, 当$k > r$时, 规定$D_k(\lambda) = 0$

定理. 等价的λ-矩阵的各阶行列式因子相同.特别, 等价的λ-矩阵的秩也相同.

证明. 我们只证明行的初等变换, 对于列的初等变换可以同样讨论(请同学们完成).设$A(\lambda)$经过一次行的初等变换为$B(\lambda)$, $D_k(\lambda)$与$\overline{D}_k(\lambda)$分别为$A(\lambda)$ 与$B(\lambda)$的k阶行列式因子, 下面说明$D_k(\lambda) = \overline{D}_k(\lambda)$.

1). 如果$A(\lambda)$经第一类行初等变换而得$B(\lambda)$, 则$B(\lambda) = P(i, j)A(\lambda)$, 于是, $B(\lambda)$的每一个k阶子式与$A(\lambda)$的某个k阶子式相等或者反号, 因此, $D_k(\lambda)|\overline{D}_k(\lambda)$.

2). 如果$A(\lambda)$经第二类行初等变换而得$B(\lambda)$, 则$B(\lambda) = P(i(c))A(\lambda)$, 于是, $B(\lambda)$的任一k阶子式与$A(\lambda)$的某个k阶子式相等或相差一个非零的常数因子, 因此, $D_k(\lambda)|\overline{D}_k(\lambda)$.

3). 如果$A(\lambda)$经第三类行初等变换而得$B(\lambda)$, 则$B(\lambda) = P(i, f(\lambda)j)A(\lambda)$. 于是, $B(\lambda)$中不含第i行或者同时含i行与第j行那些k阶子式都等于$A(\lambda)$中对应的k阶子式, 而$B(\lambda)$中含第i行不含第j行的子式, 则可把它化为$A(\lambda)$的一个k阶子式与$A(\lambda)$的另一个k阶子式的$\pm f(\lambda)$倍的和, 因而$D_k(\lambda)|\overline{D}_k(\lambda)$.

因为初等变换都是可逆的, 所以同样可以证明$\overline{D}_k(\lambda)|D_k(\lambda)$. 由于$\overline{D}_k(\lambda)$和$D_k(\lambda)$都是首项系数为1. 所以$\overline{D}_k(\lambda) = D_k(\lambda)$.

现在设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的秩分别是r_1和r_2. 当$k > r_1$时, $D_k(\lambda) = 0$, 于是$\overline{D}_k(\lambda) = 0$, 即$B(\lambda)$的所有$k$阶子式都为零, 所以$r_2 \le r_1$. 同样可以证明$r_1 \le r_1$, 于是$r_1 = r_2$.

引理. 设λ-矩阵$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它除尽, 那末一定可以找到一个与$A(\lambda)$ 等价的λ-矩阵, 它的左上角元素也不为零, 但是次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

证明. 根据$A(\lambda)$中不能被$a_{11}(\lambda)$除尽的元素所在的位置, 分三种情形来讨论.

1) 如果在$A(\lambda)$的第一列中有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽, 即有

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$

其中余式$r(\lambda) \neq 0$ 且次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低.

对$A(\lambda)$作下列初等变换

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i - q(\lambda) r_1} \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ r(\lambda) \cdots & \cdots & \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_i} \begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} = B(\lambda)$$

$B(\lambda)$的左上角元素$r(\lambda)$符合引理的要求, 故$B(\lambda)$即为所求的λ-矩阵.

2) 在$A(\lambda)$的第一行中有一个元素$a_{1j}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽, 这种情形的证明与(1)类似.

3) $A(\lambda)$的第一行与第一列中的元素都可以被$a_{11}(\lambda)$除尽, 但$A(\lambda)$中有另一个元素$a_{ij}(\lambda)((i > 1, j > 1)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽.我们设$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$, 对$A(\lambda)$作下列初等变换

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) \; &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i-\varphi(\lambda)r_1} \\
&\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_i} \\
&\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)+(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \end{pmatrix} = A_1(\lambda)
\end{aligned}
$$

矩阵$A_1(\lambda)$的第一行中有一个元素$a_{ij}(\lambda)+(1-\varphi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$不能被左上角元素$a_{11}(\lambda)$除尽, 这就化为已经证明了的情形(2).

定理. 设$A(\lambda)$是一个秩为r的$m\times n$, 则$A(\lambda)$等价于一个具有下面形状的λ-矩阵

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

这里

$$\Lambda=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r(\lambda) \end{pmatrix}$$

而且$d_i(\lambda)$是首项系数为1的多项式, $i=1,2,\cdots,r$, 满足$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$,$i=1,2,\cdots,r-1$.

证明. 当时, 则定理显然成立. 下面假设$A(\lambda) \neq 0$, 并且对$A(\lambda)$的行数m进行归纳. 当$m = 1$时, 则

$$A(\lambda) = (a_1(\lambda), a_2(\lambda), \cdots, a_n(\lambda))$$

由于$A(\lambda) \neq 0$, 所以我们可以交换$A(\lambda)$的列可以假设$a_1(\lambda) \neq 0$, 如果$a_1(\lambda)|a_i(\lambda), i = 2, 3, \cdots, n$不成立, 则存在λ-矩阵

$$A^{(1)}(\lambda) = (a_1^{(1)}(\lambda), a_2^{(1)}(\lambda), \cdots, a_n^{(1)}(\lambda))$$

使得$A(\lambda)$与$A^{(1)}(\lambda)$等价并且$0 \leq \deg(a_1^{(1)}(\lambda)) < \deg(a_1(\lambda))$ 如果$a_1^{(1)}(\lambda)|a_i^{(1)}(\lambda), i = 2, 3, \cdots, n$不成立, 则存在λ-矩阵

$$A^{(2)}(\lambda) = (a_1^{(2)}(\lambda), a_2^{(2)}(\lambda), \cdots, a_n^{(2)}(\lambda))$$

使得$A^{(1)}(\lambda)$与$A^{(2)}(\lambda)$等价并且$0 \leq \deg(a_1^{(2)}(\lambda)) < \deg(a_1^{(1)}(\lambda))$. 如果$a_1^{(2)}(\lambda)|a_i^{(2)}(\lambda), i = 2, 3, \cdots, n$不成立, 则得到$A^{(3)}$, 这样一直下去, 由于$\deg(a_1(\lambda))$是有限的, 所以一定存在$s$使得λ-矩阵

$$A^{(s)}(\lambda) = (a_1^{(s)}(\lambda), a_2^{(s)}(\lambda), \cdots, a_n^{(s)}(\lambda))$$

与$A(\lambda)$等价并且$a_1^{(s)}(\lambda)|a_i^{(s)}(\lambda), i = 2, 3, \cdots, n$. 于是$A(\lambda)$等价

$$(a_1^{(s)}(\lambda), 0, \cdots, 0)$$

定理成立

对于一般的λ-矩阵$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 由于$A(\lambda)\neq 0$, 所以可以经过行列交换, 可以使得$a_{11}(\lambda)\neq 0$, 如果$a_{11}(\lambda)$不能除尽$A(\lambda)$的全部元素, 则存在$A^{(1)}(\lambda)=(a_{ij}^{(1)}(\lambda))_{m\times n}$与$A(\lambda)$等价并且

$$0\leq \deg(a_{11}^{(1)}(\lambda))<\deg(a_{11}(\lambda))$$

如果$a_{11}^{(1)}(\lambda)$不能除尽$A^{(1)}(\lambda)$的全部元素, 则存在$A^{(2)}(\lambda)=(a_{ij}^{(2)}(\lambda))_{m\times n}$与$A^{(1)}(\lambda)$等价并且

$$0\leq \deg(a_{11}^{(2)}(\lambda))<\deg(a_{11}^{(1)}(\lambda))$$

如果$a_{11}^{(2)}(\lambda)$不能除尽$A^{(2)}(\lambda)$的全部元素, 则存在$A^{(3)}(\lambda)=(a_{ij}^{(3)}(\lambda))_{m\times n}$与$A^{(2)}(\lambda)$等价并且

$$0\leq \deg(a_{11}^{(3)}(\lambda))<\deg(a_{11}^{(2)}(\lambda))$$

这样一直下去, 由于$\deg(a_{11}(\lambda))$是一个有限数, 所以一定存在s使得$A^{(s)}(\lambda)=(a_{ij}^{(s)}(\lambda))_{m\times n}$与$A(\lambda)$等价并且$a_{11}^{(s)}(\lambda)$除尽$A^{(s)}(\lambda)$的全部元素, 于是$A(\lambda)$等价

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(s)}(\lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(\lambda) \end{pmatrix}$$

而且$a_{11}^{(s)}(\lambda)$除尽$B(\lambda)$的全部元素

由于$B(\lambda)$是$m-1\times n-1$, 所以由归纳假设$B(\lambda)$等价

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}, \text{这里}\Lambda_1=\begin{pmatrix}d_2(\lambda) & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \cdots & d_r(\lambda)\end{pmatrix}$$

而且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), i=2,\cdots,r-1$. 由于$B(\lambda)$与$C(\lambda)$等价, 所以存在可逆λ-矩阵$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$使得

$$C(\lambda)=P(\lambda)B(\lambda)Q(\lambda)$$

令$P(\lambda)=(p_{ij}(\lambda)), B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda)), Q(\lambda)=(q_{ij}(\lambda))$, 则

$$d_{i-1}(\lambda)=\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m-1}p_{ik}(\lambda)b_{kl}(\lambda)q_{li}(\lambda)\quad i=3,\cdots,r+1$$

由于$a_{11}^{(s)}(\lambda)$除尽$B(\lambda)$的全部元素, 所以$a_{11}^{(s)}(\lambda)|d_i(\lambda), i=2,\cdots,r$. 令$d_1(\lambda)=a_{11}^{(s)}(\lambda)$, 则$A(\lambda)$等价于

$$\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

定义. 如果$m\times n$的λ-矩阵$A(\lambda)$ 等价于λ-矩阵

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\text{这里}\Lambda=\begin{pmatrix}d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_r(\lambda)\end{pmatrix}$$

并且$d_i(\lambda)$是首项系数为1的多项式, $i=1,2,\cdots,r$, 满足$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$,$i=1,2,\cdots,r-1$. 则则称$D(\lambda)$为$A(\lambda)$的一个标准形, $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为$A(\lambda)$的不变因子.

引理. 设

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}\Lambda & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\text{这里}\Lambda=\begin{pmatrix}d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_r(\lambda)\end{pmatrix}$$

为λ-矩阵$A(\lambda)$的一个标准形, 则$A(\lambda)$的k阶行列式因子

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda),\quad 1\le k\le r.$$

证明. 由于$A(\lambda)$的k阶行列因子$D_k(\lambda)$等于λ-矩阵$D(\lambda)$的k阶行列式因子, $1 \leq k \leq r$. 又因在$D(\lambda)$中不为0的k阶子式只有k阶主子式, 因而$D(\lambda)$的不为0的k阶子式等于

$$d_{i_1}(\lambda)d_{i_2}(\lambda)\cdots d_{i_k}(\lambda)$$

其中$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq r$. 由于$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, 于是

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda) \quad k = 1, 2, \cdots, r.$$

定理. λ-矩阵的标准形唯一.

证明. 设λ-矩阵$A(\lambda)$有两个标准形

$$D^{(i)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{这里}\Lambda^{(i)} = \begin{pmatrix} d_1^{(i)}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{(i)}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{r_i}^{(i)}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

由于等价不改变λ-矩阵的秩和行列式因子, 所以$r_1 = r_2 = r$并且

$$d_1^{(1)}(\lambda)d_2^{(1)}(\lambda)\cdots d_k^{(1)}(\lambda) = d_1^{(2)}(\lambda)d_2^{(2)}(\lambda)\cdots d_k^{(2)}(\lambda), k = 1, 2, \cdots, r$$

于是$D^{(1)}(\lambda) = D^{(2)}(\lambda)$.

定理. 设$A(\lambda),B(\lambda)$均为$m\times n$的λ-矩阵, 则$A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$的充分必要条件$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的各阶行列式因子相等, 或$A(\lambda)$与$B(\lambda)$的不变因子完全相同.

证明. $A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$当且仅当它们有相同的标准形相同, 当且仅当它们的各阶行列式因子相同, 当且仅当它们的不变因子完全相同.

定理. n阶$\lambda-$方阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是$A(\lambda)\leftrightarrow E$

证明. (必要性)$A(\lambda)$可逆, 则$|A(\lambda)|=c$, 其中c为一非零常数, 于是

$$D_n(\lambda)=1$$

由于$D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda),(i=1,2,\cdots,n-1)$, 所以$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_n(\lambda)=1$, 由此推出$A(\lambda)$的不变因子$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=1$. 即$A(\lambda)\leftrightarrow E$.

(充分性) 设$A(\lambda)\leftrightarrow E$, 则存在初等阵$P_1(\lambda),\cdots,P_s(\lambda);Q_1(\lambda),\cdots,Q_t(\lambda)$, 使得

$$P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)=E,$$

所以,

$$|P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)||A(\lambda)||Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)|=|E|=1,$$

因而$|A(\lambda)|=c$为非零常数, 即$A(\lambda)$可逆.

推论. $A(\lambda)$可逆的充分必要条件$A(\lambda)$是初等方阵的乘积.

证明. $A(\lambda)$可逆充要条件$A(\lambda)\leftrightarrow E$, 这等价于存在初等阵$P_1(\lambda),\cdots,P_s(\lambda)$; $Q_1(\lambda),\cdots,Q_t(\lambda)$, 使得

$$\begin{aligned}A(\lambda)&=P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)EQ_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)\\&=P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)\end{aligned}$$

推论. 设$A(\lambda)$与$B(\lambda)$均为$m\times n$的λ-矩阵, 则$A(\lambda)\leftrightarrow B(\lambda)$充分必要条件是存在$m$阶可逆$\lambda$-方阵$P(\lambda)$和$n$阶可逆$\lambda-$方阵$Q(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda).$$

证明. 这个推论的证明留给同学完成.

例. 用初等变换化λ–矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

为标准形.

解.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[c_3-(1-\lambda)c_1]{c_2-\lambda^2 c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & o \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

即为$A(\lambda)$的标准形.

例. 求λ-矩阵

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-a & -1 & & & \\ & \lambda-a & -1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \\ & & & \lambda-a & -1 \\ & & & & \lambda-a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

的标准形.

解. 因为$J(\lambda)$的n阶行列式因子$D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$, 又容易看出, 去掉$J(\lambda)$的第一列与第$n$行后所得的$n-1$阶行列式为

$$\begin{vmatrix} -1 & & & \\ \lambda-a & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda-a & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

因为$D_{n-1}(\lambda)|D_n(\lambda)$, 所以$D_{n-1}(\lambda)=1$, 从而

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-1}(\lambda)=1, \quad D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$$

得$J(\lambda)$的不变因子为

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1\text{个}},(\lambda-a)^n$$

所以

$$J(\lambda)\leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-a)^n \end{pmatrix}$$

例. 求λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

的标准形.

解. $A(\lambda)$的三阶行列式因子

$$D_3(\lambda) = |A(\lambda)| = (\lambda^2 - 1)(\lambda + 3).$$

由于$D_2(\lambda)|D_3(\lambda)$, 所以$D_2(\lambda)$只能为$(\lambda^2-1)(\lambda+3)$的因子, 容易看出, 去掉$A(\lambda)$的第一列与第三行后所得的二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)$$

所以$D_2(\lambda)$必为$(\lambda^2-1)(\lambda+3)$与$\lambda(\lambda+2)$的因子, 因而

$$D_2(\lambda) = 1, \quad D_1(\lambda) = 1$$

故$A(\lambda)$的不变因子为

$$1, 1, (\lambda^2-1)(\lambda+3)$$

且

$$A(\lambda) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda^2-1)(\lambda+3) \end{pmatrix}$$

练习. 习题8.1:1(3)(4), 2(2)(6)