同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

§7.1 不变子空间与根空间分解

定义. 设T 是线性空间V 上的线性变换, W是V的子空间, 如果对于任意$\alpha \in W$都有$T(\alpha) \in W$, 则称W 为T 的不变子空间, 或者称W 为T-子空间.

注意. 对于V 的任意一个线性变换T, V 本身及零子空间都是T-子空间.

例. 设T 是线性空间V 上的线性变换, 证明T 的像空间$T(V) = \{T(\alpha)|\alpha \in V\}$ 和T核空间$\ker(T) = \{\alpha \in V|T(\alpha) = \mathbf{0}\}$都是$T$的不变子空间.

证明. 前面已经证明$T(V)$和$\ker(T)$是V的子空间.

对于$\alpha \in T(V)$, 由$T(V)$的定义推出$T(\alpha) \in T(V)$, 所以$T(V)$是T的不变子空间.

对于$\alpha \in \ker(T)$, 由于$T(\alpha) = \mathbf{0} \in \ker(T)$, 所以$\ker(T)$是$T$的不变子空间.

命题. 设T是线性空间V上的线性变换, W是V的子空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$W$的一个基, 则$W$是$T$-子空间充要条件$T(\alpha_i)\in W,(i=1,2,\cdots,s)$.

证明. (必要性)由T-子空间的定义推出$T(\alpha_i)\in W,(i=1,2,\cdots,s)$.

(充分性) 对于$\alpha\in W$, 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$W$的一个基, 所以$\alpha$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示, 即

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

于是

$$\begin{aligned}T(\alpha)&=T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)\\&=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+\cdots+k_sT(\alpha_s)\in W\end{aligned}$$

所以W是T-子空间.

例. 设T是$\mathbb{F}[x]$上的线性变换,

$$T(f(x)) := f'(x), \quad f(x) \in \mathbb{F}[x]$$

对于任意正整数n, 证明$\mathbb{F}_n[x]$是T-子空间.

证明. 由于$1, x, x^2, \cdots, x^n$是$\mathbb{F}_n[x]$基, 而且对于$k = 0, 1, \cdots, n$

$$T(x^k) = kx^{k-1} \in \mathbb{F}_n[x]$$

所以$\mathbb{F}_n[x]$是T-子空间.

命题. 设V 上线性变换T_1, T_2 可交换, 则T_1 的像空间$T_1(V)$ 和T_1 的核空间$\ker(T_1)$ 都是T_2-子空间.

证明. 对于$\beta \in T_1(V)$, 则存在$\alpha \in V$ 使得$T_1(\alpha) = \beta$. 于是$T_2(\beta) = T_2T_1(\alpha) = T_1T_2(\alpha) \in T_1(V)$, 所以$T_1(V)$是$T_2$-子空间.

对于$\beta \in \ker(T_1)$, 则$T_1(\beta) = \mathbf{0}$. 于是$T_1T_2(\beta) = T_2T_1(\beta) = T_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 即$T_2(\beta) \in \ker(T_1)$, 所以$\ker(T_1)$是$T_2$-子空间.

注意. 对于多项式$f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$, 线性变换$T$ 与$f(T)$ 可以交换, 于是$f(T)$ 的象空间与核空间也都是T-子空间. 特别, 如果$\lambda = c$ 是T 的任意特征值, 取$f(\lambda) = c - \lambda$, 则$f(T) = c\mathcal{E} - T$ 的核空间

$$V_c = \{\alpha \in V | (c\mathcal{E} - T)(\alpha) = \mathbf{0}$$

是特征值c 所对应的特征子空间, 因此T 的任一特征子空间都是T-子空间.

说明. 当W 是T-子空间, 由于$T(W) \subseteq W$, 所以T 可以看成W 上的线性变换, 记为$T|_W$.

命题. 设W是V的子空间,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$是$W$的一个基,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)$是$V$的一个基, T是V上的线性变换, 则W是T-子空间的充要条件T在有序基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} B_{s\times s} & C_{s\times(n-s)} \\ \mathbf{0} & D_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}$$

证明. W是T-子空间充要条件$T(\beta_i)\in W,(i=1,2,\cdots,s)$, 这等价于

$$\begin{cases} T(\beta_1)=a_{11}\beta_1+\cdots+a_{1s}\beta_s \\ T(\beta_2)=a_{21}\beta_1+\cdots+a_{2s}\beta_s \\ \cdots\cdots \\ T(\beta_s)=a_{s1}\beta_1+\cdots+a_{ss}\beta_s \\ T(\beta_{s+1})=a_{s+11}\beta_1+\cdots+a_{s+1s}\beta_s+a_{s+1s+1}\beta_{s+1}+\cdots+a_{s+1n}\beta_n \\ \cdots\cdots \\ T(\beta_n)=a_{n1}\beta_1+\cdots+a_{ns}\beta_s+a_{ns+1}\beta_{s+1}+\cdots+a_{nn}\beta_n \end{cases}$$

它的矩阵形式

$$T(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)A$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} B_{s\times s} & C_{s\times(n-s)} \\ \mathbf{0} & D_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix},\quad B_{s\times s}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}$$

说明. 由命题的证明可以看出$T|_W$ 在W 的基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 下的矩阵就是$B_{s\times s}$.

推论. 设T是线性空间V上的线性变换, W是T-子空间, 则$T|_W$的特征多项式整除T的特征多项式.

证明. 设$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$是$W$的一个基, 将它扩充$V$的一个基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)$, 则$T$在有序基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n)$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} B_{s\times s} & C_{s\times(n-s)} \\ \mathbf{0} & D_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}$$

$T|_W$ 在W 的基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 下的矩阵就是$B_{s\times s}$. 于是

$$\begin{aligned}\Delta_{T|W}(\lambda)&=|\lambda E_s-B_{s\times s}|\\ \Delta_T(\lambda)=|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix} \lambda E_s-B_{s\times s} & -C_{s\times(n-s)} \\ \mathbf{0} & \lambda E_{(n-s)\times(n-s)}-D_{(n-s)\times(n-s)} \end{vmatrix}\\ &=|\lambda E_s-B_{s\times s}||\lambda E_{(n-s)\times(n-s)}-D_{(n-s)\times(n-s)}|\end{aligned}$$

因此$\Delta_{T|_W}(\lambda)|\Delta_T(\lambda)$

说明. 如果V_1和V_2都是T-子空间而且

$$V = V_1 \oplus V_2$$

则将V_1的有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$和$V_2$的有序基$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})$合在一起得到$V$的有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})$，如果$T_{V_1}$在基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$的矩阵为$A_1$和$T_{V_2}$在基$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})$的矩阵为$A_2$, 即

$$T_{V_1}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)A_1, \quad T_{V_2}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})A_2$$

则

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}) = (T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), T(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}))$$
$$= ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)A_1, (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})A_2) = ((\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}))\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$$

所以T在基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s})$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$$

一般如果$V_1, V_2, \cdots, V_s$都是T-子空间并且

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

则将V_i的有序基$B_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \cdots, \alpha_{i,s_i})$并起来就是$V$的有序基$(B_1, B_2, \cdots, B_s)$，如果$T|_{V_i}$在有序基$B_i$下的矩阵是$A_i$, 则

$$\begin{aligned} T(B_1, B_2, \cdots, B_s) &= (TB_1, TB_2, \cdots, TB_s) = (B_1A_1, B_2A_2, \cdots, B_sA_s) \\ &= (B_1, B_2, \cdots, B_s)\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以T在有序基$(B_1, B_2, \cdots, B_s)$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

例. 设V 是域$\mathbb{F}$ 上n 维线性空间, T 是V 上的线性变换, 对于$\alpha \in V$ 并且$\alpha \neq \mathbf{0}$. 如果k 是使得$\alpha, T(\alpha), \cdots, T^k(\alpha)$ 线性相关的最小正整数. 令

$$W = \text{Span}\{\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{k-1}(\alpha)\}$$

证明W是T-子空间并且求$T|_W$的特征多项式.

证明. 由k 的假设推出$k > 0$并且$\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{k-1}(\alpha)$ 线性无关, 所以是W的基. 由于$\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{k-1}(\alpha)$,$T^k(\alpha)$线性相关, 所以存在$b_0, b_1, \cdots, b_{k-1} \in \mathbb{F}$, 使得

$$T^k(\alpha) = b_0\alpha + b_1 T(\alpha) + \cdots + b_{k-1}T^{k-1}(\alpha)$$

所以对于$j = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, $T(T^j(\alpha)) = T^{j+1}(\alpha) \in W$, 所以$W$是$T$-子空间.

$T|_W$在W的基$(\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{k-1}(\alpha))$的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{k-1} \end{pmatrix}$$

所以$T|_W$的特征多项式为

$$\Delta_{T|_W}(\lambda) = |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -b_{k-1} \end{vmatrix} = \lambda^k - (b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{k-1}\lambda^{k-1})$$

命题. 设V 是域$\mathbb{F}$ 上的n 维线性空间, T 是V 上的线性变换, $\Delta_T(\lambda)$ 是T 的特征多项式, 则$\Delta_T(T)$ 是V上的零线性变换.

证明. 对于$\alpha \in V$, 下面我们验证$\Delta_T(T)(\alpha) = \mathbf{0}$
如果$\alpha = \mathbf{0}$, 则$\Delta_T(T)(\alpha) = \mathbf{0}$.
如果$\alpha \neq \mathbf{0}$, 则考虑V的子空间

$$W = \mathrm{span}\{\alpha, T(\alpha), \cdots, T^{k-1}(\alpha)\}$$

这里k是使得$\alpha, T(\alpha), \cdots, T^k(\alpha)$ 线性相关的最小正整数. 前面的例子告诉我们W是T-子空间, $T|_W$的特征多项式为

$$\Delta_{T|_W}(\lambda) = \lambda^k - b_0 - b_1\lambda - \cdots - b_{k-1}\lambda^{k-1}$$

其中$b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$满足

$$T^k(\alpha) = b_0\alpha + b_1 T(\alpha) + \cdots + b_{k-1}T^{k-1}(\alpha)$$

由于$\Delta_{T|_W}(\lambda)|\Delta_T(\lambda)$, 所以存在$g(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$使得$\Delta_T(\lambda) = g(\lambda)\Delta_{T|_W}(\lambda)$ 于是

$$\begin{aligned}\Delta_T(T)(\alpha) &= g(T)\Delta_{T|_W}(T)(\alpha) = g(T)(T^k - b_0\mathcal{E} - b_1 T + \cdots - b_{k-1}T^{k-1})(\alpha)\\ &= g(T)(T^k(\alpha) - b_0(\alpha) - b_1 T(\alpha) + \cdots - b_{k-1}T^{k-1}(\alpha)) = g(T)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

所以$\Delta_T(T) = \mathcal{O}$

推论. 设A 是n 阶方阵, $\Delta_A(\lambda)$ 是A 的特征多项式, 则$\Delta_A(A) = \mathbf{0}$.

证 明. 设V是n维线性空间, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$V$ 的一个有序基, φ是在有序基$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$下$\mathcal{L}(V, V)$到$M_n(\mathbb{F})$的同构映射. 则对于$A \in M_n(\mathbb{F}$, 存在$T \in \mathcal{L}(V, V)$使得$\varphi(T) = A$. 设$T$的特征多项式$\Delta_T(\lambda)(= \Delta_A(\lambda))$为

$$\Delta_T(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

于是

$$\begin{aligned}
\Delta_A(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E \\
&= \varphi(T)^n + a_{n-1}\varphi(T)^{n-1} + \cdots + a_1\varphi(T) + a_0\varphi(\mathcal{E}) \\
&= \varphi(T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0\mathcal{E}) \\
&= \varphi(\Delta_T(T)) = \varphi(\mathcal{O}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

练习. 习题7.5:1(1)(2),3,4.

定义. 设n维线性空间V上的线性变换T的特征多项式为

$$\Delta_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{c_1}(\lambda-\lambda_2)^{c_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{c_s}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$T$的两两不同特征值, 对于$i=1,2,\cdots,s$, 令

$$W_{\lambda_i} := \{\alpha\in V|(\lambda_i\mathcal{E}-T)^{c_i}(\alpha)=\mathbf{0}\}$$

称W_{λ_i}为特征值λ_i的根子空间.

定理.(根子空间分解定理) 设V是n维线性空间, T是V上的线性变换, T的特征多项式为

$$\Delta_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{c_1}(\lambda-\lambda_2)^{c_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{c_s}$$

则
(1) 对于$i=1,2,\cdots,s$, 根子空间W_{λ_i}是T-子空间

(2) 线性空间V有下面的分解式

$$V = W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_s}$$

(3) 对于$i=1,2,\cdots,s$, $\dim W_{\lambda_i}=c_i$.

证明. (1)对于$i=1,2,\cdots,s$, 记多项式$f_i(\lambda):=(\lambda_i-\lambda)^{c_i}$, 则$f_i(T)=(\lambda_i\mathcal{E}-T)^{c_i}$并且$W_{\lambda_i}=\ker(f_i(T))$, 所以$W_{\lambda_i}$是$V$的子空间. 由于$T$与$f_i(T)$可以交换, 所以$\ker(f_i(T))=W_{\lambda_i}$是$T$-子空间.

(2)令

$$g_i(\lambda) := \frac{\Delta_T(\lambda)}{f_i(\lambda)}$$

对于$\alpha \in V$,

$$f_i(T)g_i(T)(\alpha) = \Delta_T(T)(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha) = \mathbf{0}$$

这说明$g_i(T)(\alpha) \in \ker(f_i(T)) = W_{\lambda_i}$.

由于

$$(g_1(\lambda), g_2(\lambda), \cdots, g_s(\lambda)) = 1$$

所以存在多项式$u_1(\lambda), u_2(\lambda), \cdots, u_s(\lambda)$使得

$$g_1(\lambda)u_1(\lambda) + g_2(\lambda)u_2(\lambda) + \cdots + g_s(\lambda)u_s(\lambda) = 1$$

于是

$$g_1(T)u_1(T) + g_2(T)u_2(T) + \cdots + g_s(T)u_s(T) = \mathcal{E}$$

对于$\alpha \in V$,

$$g_1(T)u_1(T)(\alpha) + g_2(T)u_2(T)(\alpha) + \cdots + g_s(T)u_s(T)(\alpha) = \mathcal{E}(\alpha) = \alpha$$

因此

$$V = W_{\lambda_1} + W_{\lambda_2} + \cdots + W_{\lambda_s}$$

设

$$\mathbf{0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$$

这里$\alpha_i \in W_{\lambda_2}, (i = 1, 2, \cdots, s)$, 如果$\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$不全为零向量, 则不妨假设$\alpha_1 \neq \mathbf{0}$, 于是

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \cdots - \alpha_s$$

由于多项式$f_1(\lambda)$与多项式$f_2(\lambda) \cdots f_s(\lambda)$互素, 所以存在多项式$u_1(\lambda)$和$u_2(\lambda)$使得

$$u_1(\lambda) f_1(\lambda) + u_2(\lambda) f_2(\lambda) \cdots f_s(\lambda) = 1$$

于是

$$u_1(T) f_1(T) + u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T) = \mathcal{E}$$

这样

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \mathcal{E}(\alpha_1) &= u_1(T) f_1(T)(\alpha_1) + u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T)(\alpha_1) \\
&= u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T)(\alpha_1) = u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T)(-\alpha_2 - \cdots - \alpha_s) \\
&= -u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T)(\alpha_2) - \cdots - u_2(T) f_2(T) \cdots f_s(T)(\alpha_s) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

这与$\alpha_1 \neq \mathbf{0}$矛盾. 所以只有当$\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$都是零向量时, 才可能

$$\mathbf{0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$$

所以

$$V = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$$

(3) 对于$i=1,2,\cdots,s$, 设$\dim W_{\lambda_i}=s_i$和$B_i=(\alpha_{i,1},\alpha_{i,2},\cdots,\alpha_{i,s_i})$为$W_{\lambda_i}$的有序基. 由于

$$V=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_s}$$

所以$(B_1,B_2,\cdots,B_s)$是V的有序基, 而且如果$T|_{W_{\lambda_i}}$在有序基B_i下的矩阵是A_i, 则T在有序基$(B_1,B_2,\cdots,B_s)$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

对于$\alpha\in W_{\lambda_i}$

$$f_i(T|_{W_{\lambda_i}})(\alpha)=f_i(T)(\alpha)=\mathbf{0}$$

所以$f_i(T|_{W_{\lambda_i}})$是W_{λ_i}上的零线性变换, 所以$T|_{W_{\lambda_i}}$的最小多项式$m_{T|_{W_{\lambda_i}}}(\lambda)|f_i(\lambda)$. 由此推出$m_{T|_{W_{\lambda_i}}}=(\lambda-\lambda_i)^{t_i}$, 因此$T|_{W_{\lambda_i}}$的特征多项式$\Delta_{T|_{W_{\lambda_i}}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{s_i}$, 由于$\Delta_{T|_{W_{\lambda_i}}}(\lambda)|\Delta_T(\lambda)$, 所以$s_i\le c_i$, 但是

$$n=s_1+s_2+\cdots+s_s\le c_1+c_2+\cdots+c_s=n$$

由此推出$c_i=s_i,(i=1,2,\cdots,s)$.

例. 设线性空间$V=\mathbb{C}^3$, T是V上的线性变换, 它在V的标准基$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

求线性变换T的根空间分解, 并且在V中选择的一个有序基使得线性变换T在这个基下的矩阵是准对角阵还是下三角矩阵.

解. 计算T的特征多项式.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

由于

$$(A-E)(A-2E)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq \mathbf{0}.$$

所以$m_A(\lambda)=\Delta_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ 有重根, 因此A 不可对角化.

因为$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 所以由根子空间分解定理得$V=W_1\oplus W_2$, 其中$W_1$是特征值1的根子空间, W_2是特征值2的根子空间,并且$\dim W_1=2$, $\dim W_2=2$. 所以我们可以从W_1和W_2中选基, 将它们合起来就是V的基, 而且T在这个基下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a \end{pmatrix}$$

其中A_1是2阶方阵.

下面具体给出W_1的基和W_2的基, 使得T在这两个合起来而成V的基下的矩阵是下三角阵.

由于$W_2=\{\alpha\in V|(2\mathcal{E}-T)(\alpha)=\mathbf{0}\}$, 它就是特征值2的特征子空间. 解齐次线性方程组

$$(2E-A)X=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以$\alpha_1=0\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3$是$W_2$的一个基, 它是属于$\lambda_1=2$的特征向量, 即

$$T(\alpha_1)=2\alpha_1$$

$W_1 = \{\alpha \in V | (\mathcal{E} - T)^2\alpha = \mathbf{0}\}$, 解齐次线性方程组

$$(E - A)^2 X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 所以$W_1$有一个基$\alpha_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \alpha_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, 由于$T$不可对角化, 所以特征值1 的特征子空间$V_1 = \{\alpha \in V | (\mathcal{E} - T)\alpha = \mathbf{0}\}$是1维的, 所以$\alpha_2$和$\alpha_3$中至少有一个不在特征子空间$V_1$. 事实上

$$(E - A)\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

所以$\alpha_2 \notin V_2$.

令$\beta_3 = (\mathcal{E} - T)(\alpha_2)$, 则由于

$$(\mathcal{E} - T)(\beta_3) = (\mathcal{E} - T)^2(\alpha_2) = 0$$

所以β_3在特征子空间V_1, 由此推出α_2, β_3线性无关, 所以是根子空间W_1的基

$$\begin{array}{l} T(\alpha_2) = \alpha_2 - \beta_3 \\ T(\beta_3) = \beta_3 \end{array}, \quad 或者 T(\alpha_2, \beta_3) = (\alpha_2, \beta_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是T在有序基$(\alpha_2, \beta_3, \alpha_1)$下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

由于标准基到$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 基$(\alpha_2, \beta_3, \alpha_1)$的过渡矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以$B = P^{-1}AP$

练习1. 在上例中找一个有序基, 使得T在这个有序基下的矩阵是上三角阵.

练习2. 习题7.5:6.