第二节　　极　限

五、极限存在准则及两个重要极限

（一）函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

（二）两个重要极限

（一） 函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

1. 函数极限与数列极限的关系

结论.

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = A \iff \forall \{x_n\}: x_n \neq x_0,\ f(x_n) \text{ 有定义,}$$

$$x_n \to x_0\ (n\to\infty)\ (x_n\to\infty), \text{ 有 } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

为确定起见，仅讨论 $x \to x_0$ 的情形.

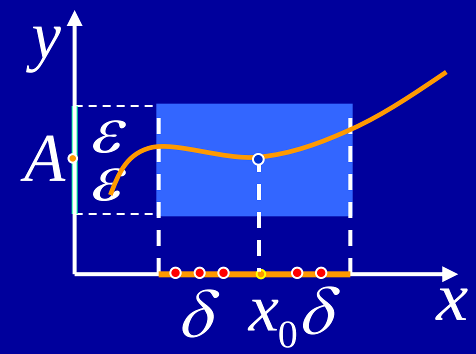
结论. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

证: "$\Longrightarrow$" 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

对上述 δ, $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

于是当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.



故 $$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

"$\Longleftarrow$" 可用反证法证明. (略)

结论. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0$, $f(x_n)$ 有定义

且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ $(x_n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

说明: 此定理常用于判断函数极限不存在 .

法1 找一个数列 $\{x_n\}$: $x_n\neq x_0$, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

例 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 .

证: 取两个趋于 0 的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi} \text{ 及 } x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=1$$

由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 .

2. 函数极限存在的夹逼准则(P49)

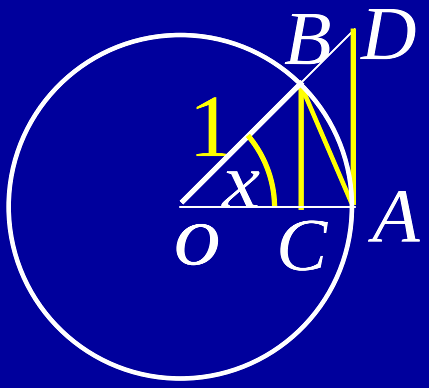
准则 I . 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且

$(|x| > X > 0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$$

（二） 两个重要极限



1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证： 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

△AOB 的面积＜圆扇形AOB的面积＜△AOD的面积

即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

故有 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x} \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

显然有 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1 \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

例61 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例61 求极限 (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}$.

解: 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 因此

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

例61 求极限 (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}2\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}\right)$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=2$$

令$2x=t$,则当$x\to 0$时,$t\to 0$.

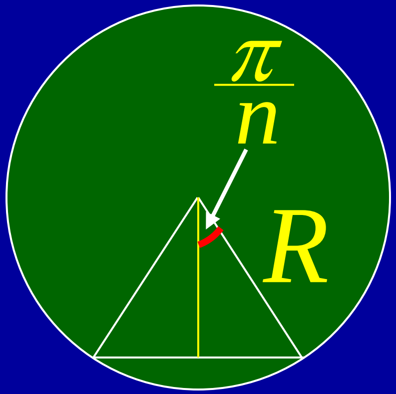
于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

例61 求极限 (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$

练习 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$



证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.

证: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi R^2\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$

说明: 一般地,有

$$\lim_{\phi(x)\to 0}\frac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1$$

2. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

证: 当 $x>0$ 时, 设 $n\le x<n+1$, 则

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})] = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

当 $x \to -\infty$ 时, 令 $x = -(t+1)$, 则 $t \to +\infty$, 从而有

$$\lim_{x \to -\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t \to +\infty} (1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} (\frac{t}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t \to +\infty} (1+\frac{1}{t})^{t+1}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} [(1+\frac{1}{t})^t (1+\frac{1}{t})] = e$$

故 $$\lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

说明: 此极限也可写为 $\lim\limits_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

例62 求极限（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解: 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{e}$$

说明： 若利用 $\lim\limits_{\phi(x)\to\infty}(1+\frac{1}{\phi(x)})^{\phi(x)}=\mathrm{e}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{-x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{-x})^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$$

例62 求极限（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

解: 当 $x\to 0$时, $\sin x\to 0$, 故

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\to \mathrm{e},\ \frac{\sin x}{x}\to 1.$$

于是，有

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}\ln[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ln[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]}$$

$$=\mathrm{e}^{1\times\ln \mathrm{e}}=\mathrm{e}.$$

一般地

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}$$

例62 求极限（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{2}=\mathrm{e}^{2}$$

例63 求极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1;$$

(2) 设$e^x-1=t$, 则$x=\ln(1+t)$;

当$x\to 0$时, $t\to 0$. 于是, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=1.$$

练习 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^2]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}[\,(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\,]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=e$$

练习2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

解法一

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{3}{2x})^{x+1}}{(1+\frac{1}{2x})^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{[(1+\frac{3}{2x})^{\frac{2x}{3}}]^{\frac{x+1}{2x}.3}}{[(1+\frac{1}{2x})^{2x}]^{\frac{x+1}{2x}}}$$

$$=\frac{e^{3/2}}{e^{1/2}}=e$$

解法二

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+1)+2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}.(x+1)}$$

$$=e$$

练习3　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=4$,求常数 a.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x+a}{x}}{\frac{x-a}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{a}{x})^{x}}{(1-\frac{a}{x})^{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{[(1+\frac{a}{x})^{\frac{x}{a}}]^{a}}{[(1-\frac{a}{x})^{-\frac{x}{a}}]^{-a}}=\frac{e^{a}}{e^{-a}}=e^{2a}$$

即 $e^{2a}=4 \quad \Rightarrow a=\ln 2$

内容小结

1. 函数极限与数列极限关系的应用

(1) 利用数列极限判别函数极限不存在

法1 找一个数列 $\{x_n\}: x_n \neq x_0$, 且 $x_n \to x_0\ (n \to \infty)$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列$\{x_n\}$及 $\{x'_n\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

(2) 数列极限存在的夹逼准则

$\Longrightarrow$ 函数极限存在的夹逼准则

2. 两个重要极限

(1) $$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

(2) $$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

或 $$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

注: $\square$ 代表相同的表达式

思考与练习

填空题 (1～4)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$ <u>0</u>;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$ <u>1</u>;

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=$ <u>0</u>;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=$ <u>e^{-1}</u>;

5. 若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在, 且 $f(x)=\frac{\sin x}{x-\pi}+2\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$, 求 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$.