矩阵的秩及其求法

1. 利用定义求矩阵的秩

利用定义求矩阵的秩就是利用矩阵的子式或行列式是否为零来确定矩阵的秩.

例1 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为非零矩阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}=A_{ij}$，求$r(A)$.

解 因为$A\neq 0$，所以至少有一个元素$a_{ij}\neq 0$；

将$|A|$按第i行展开，有

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}>0,$$

故$r(A)=n$.

注：我们一般在两个地方用到A_{ij}；一是行列式按行（列）展开；另一个是$A*$；若在$A*$中用，这时题目常常与求逆有关.

$A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}\neq O, a_{ij}+A_{ij}=0, |A|=$ ______. $a_{ij}=-A_{ij}\Rightarrow A^{*}=-A^{T}$. -1

例2 设 A 为 n 阶方阵且 $r(A)=n-2$,求 $r(A^*)$.

解 由$r(A)=n-2$知：A的所有$n-1$阶子式全为零，

故 $A^*=0$，从而$r(A^*)=0$.

例3 设$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，若$r(A)=3$，求$a$.

解 因为$r(A)=3$，所以$|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3=0.$$

当$a=1$时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A)=1$；

当$a=-3$时，$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，

由于A的3阶子式$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-16\neq 0$，$r(A)=3$，故$a=-3$.

一般地，若

$$A_n=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

则有：

$$r(A_n)=?$$

有时我们也利用矩阵的秩来求矩阵的行列式，见例4.

例4　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，求证 $|AB|=0$.

证　因为 $r(AB)\le r(A)\le n$,

而 AB 为 m 阶方阵，且 $m>n$,.

故 AB 为降秩方阵，从而 $|AB|=0$.

2. 利用矩阵的初等变换求矩阵的秩

利用矩阵的初等变换求矩阵的秩，就是利用初等变换将 A 化为阶梯形矩阵，然后由阶梯形矩阵的秩确定 A 的秩.

这是一类非常基本的题目，必须做到会做且做对.

例5 设 A 为 4×3 阶矩阵且 $r(A)=2$ ，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 求 $r(AB)$.

解 因为 $B \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, 所以 $r(B)=3$, 即 B 为满秩阵,

从而 $r(AB)=r(A)=2$.

关于矩阵秩的公式