高等数学A

第5章 空间解析几何

5.5 曲面及其方程

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

5.5 曲面及其方程

- 曲面方程引例
- 曲面及其方程
  - 概念
  - 举例
- 柱　面
- 旋转曲面
- 二次曲面
  - 椭球面
  - 抛物面
  - 马鞍面
  - 双曲面
    - 单叶双曲面
    - 双叶双曲面
  - 锥面

曲面及其方程引例

引例：在空间直角坐标系中，球心在$P_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的球面上的点$P(x,y,z)$满足什么条件？

点$P(x,y,z)$到$P_0(x_0,y_0,z_0)$的距离等于定值R，即，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

引例：在空间直角坐标系中，满足$x^2+y^2=1$的点构成什么图形？

构成一个中心轴为Z轴的单位圆柱面。

曲面及其方程的概念

曲面的实例很多:水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

曲面方程的定义:

定义5.5.1 设空间曲面 S及三元方程 $F(x, y, z)=0$. 如果 S 上任一点 $M(x, y, z)$. 其坐标 x, y, z 都满足 $F(x, y, z)=0$,则称 $F(x, y, z)=0$ 为 S 的方程. 反之, $F(x, y, z)=0$ 的任一解 (x, y, z) 对应的空间点 (x, y, z) 在 S 上,, 则称S为 $F(x, y, z)=0$ 的图形.

研究空间曲面有两个基本问题：

（1）已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

（2）已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

（讨论柱面、二次曲面）

曲面及其方程---举例

例1 建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程.

例 2 求与原点O及$M_0(2,3,4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面方程.

例 3 已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB 的垂直平分面的方程.

例4 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的?

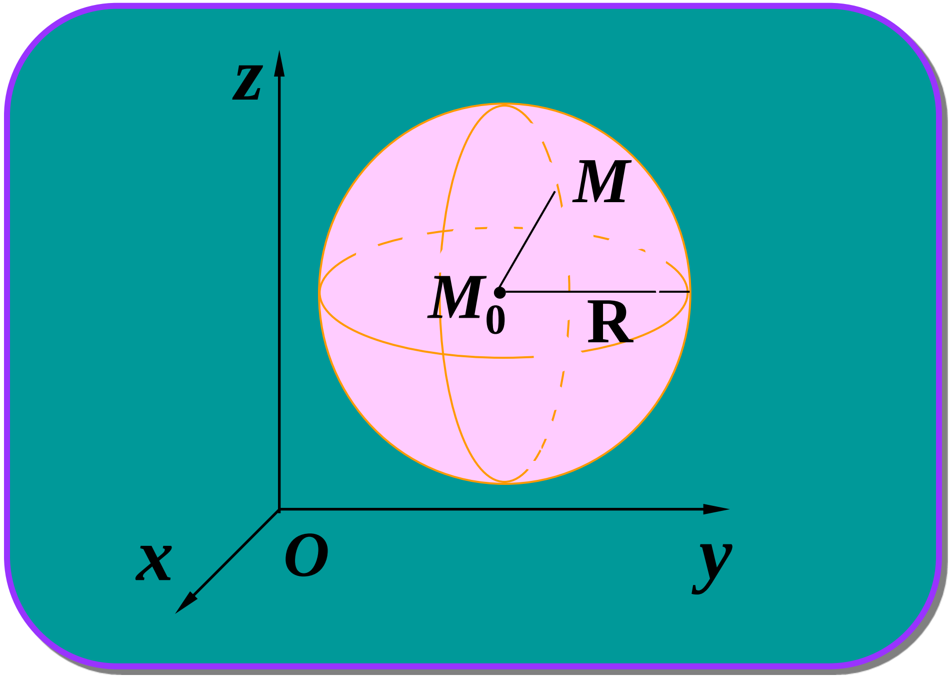
例5 求 $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$

表示的曲面，其中 D, E, F, G 为常数。

以下给出几例常见的曲面.

例1 建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面的方程.

解:



根据图形知，球面上任一点M到球心的距离为R.

即 $|\overrightarrow{M_0M}|=R$.

设M点坐标为(x, y, z)，则根据两点间距离计算公式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

或 $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (5.1)$$

球面标准方程

反之, 任取 (x, y, z) 满足 (5.1), 则 $M(x, y, z)$ 到 M_0 的距离为 R. 故 (x, y, z) 在球面上. 因此 (5.1) 即为所求球面的方程.

特殊地：球心在原点时方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例 2 求与原点O及$M_0(2,3,4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面方程.

解 设$M(x,y,z)$是曲面上任一点，

根据题意有 $$\frac{|MO|}{|MM_0|}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

所求方程为$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}.$$

例 3 已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB 的垂直平分面的方程.

解 设$M(x,y,z)$是所求平面上任一点，

根据题意有$|MA|=|MB|$，

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得所求方程 $2x-6y+2z-7=0.$

例4 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的?

解 根据题意有 $z\geq -1$

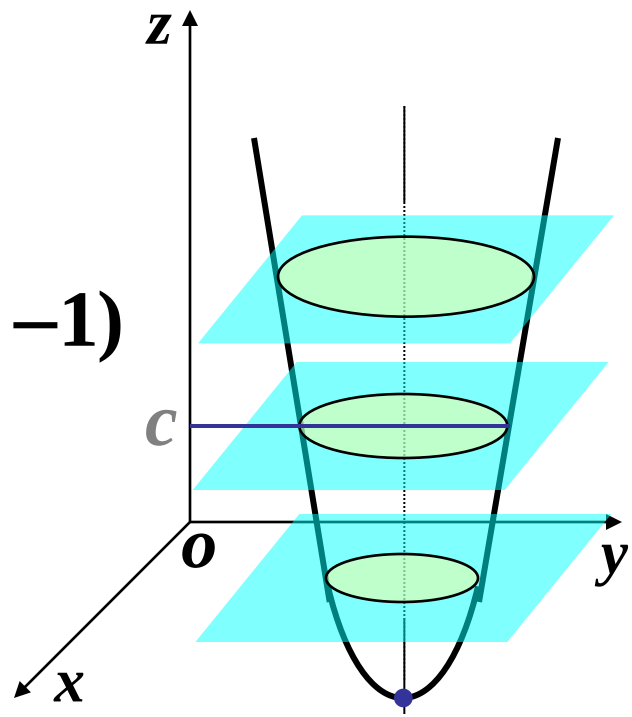
用平面$z=c$去截图形得圆:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c\geq -1)$$

当平面$z=c$上下移动时，

得到一系列圆

圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$



半径随c的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.

例5 求 $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ 表示的曲面，其中 D, E, F, G 为常数。

解 通过配方，有

$$0=x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G$$

$$=(x+D/2)^2+(y+E/2)^2+(z+F/2)^2+G-(D^2+E^2+F^2)/4$$

即

$$(x+D/2)^2+(y+E/2)^2+(z+F/2)^2=(D^2+E^2+F^2)/4-G$$

当 $(D^2+E^2+F^2)/4-G>0$ 时，方程表示的曲面为以 $(-D/2,\ -E/2,\ -F/2)$ 为球心，$\sqrt{(D^2+E^2+F^2)/4-G}$ 为半径的球面。当 $(D^2+E^2+F^2)/4-G=0$ 时，球面退化为一点 $(-D/2,\ -E/2,\ F/2)$。

当 $(D^2+E^2+F^2)/4-G<0$ 时，在空间中不存在坐标满足方程的点，这时常称方程所表示的“曲面”为虚球面。

曲面及其方程---举例

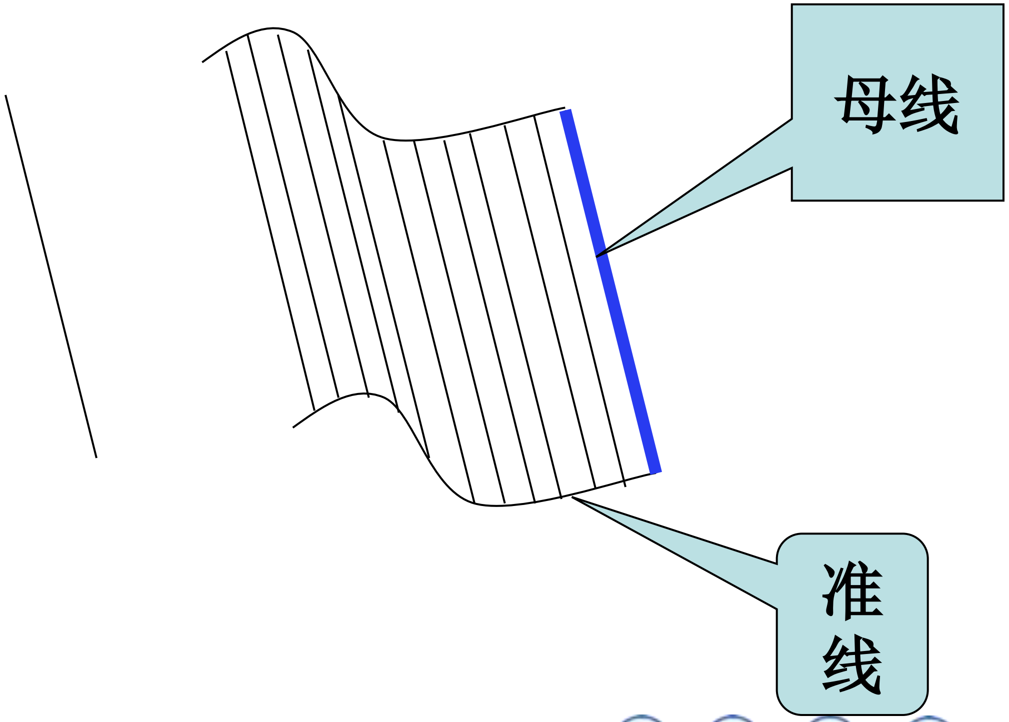
定理1形如$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$的二次方程,其图形或者是球面,或者是一个点,或者不代表任何图形.

柱 面

定义　平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

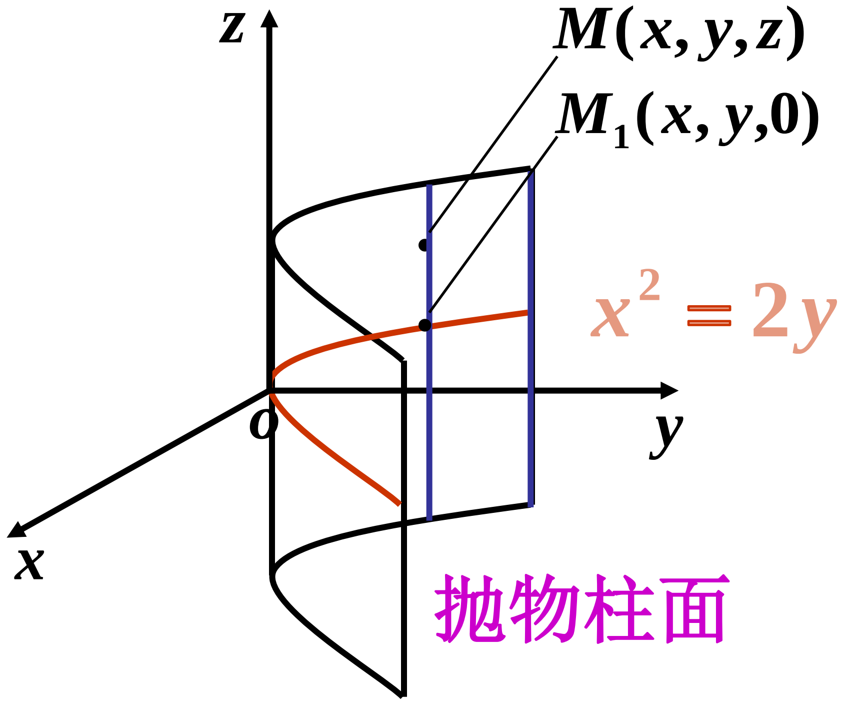
这条定曲线叫柱面的准线，动直线叫柱面的母线.

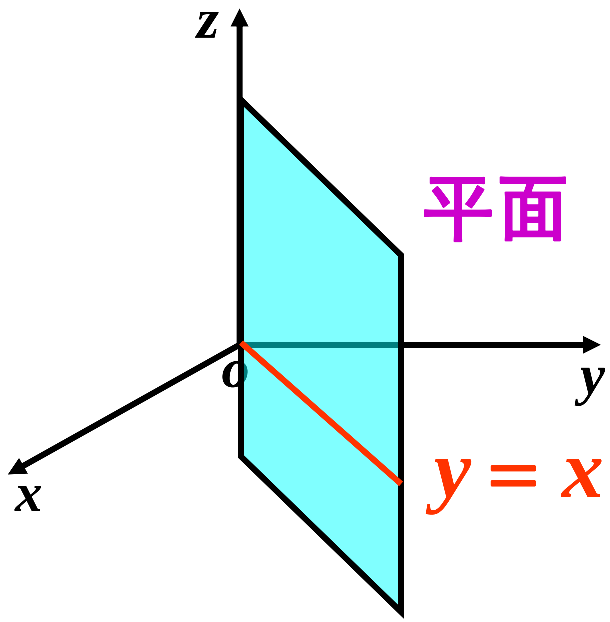
观察柱面的形成过程：



柱 面

柱面举例





抛物柱面方程：

$$x^2 = 2y$$

平面方程：

$$y = x$$

一般地，在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示**柱面**，

母线 **平行于 z 轴**；

准线 ***xoy* 面上的曲线 l_1.**

方程 $G(y,z)=0$ 表示**柱面**，

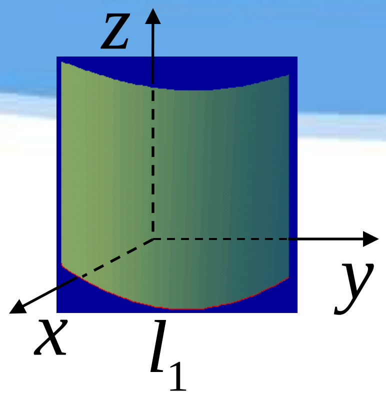
母线 **平行于 x 轴**；

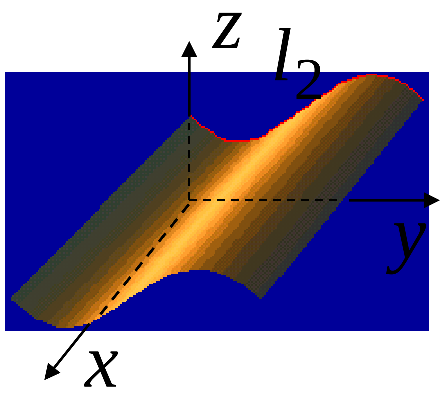
准线 ***yoz* 面上的曲线 l_2.**

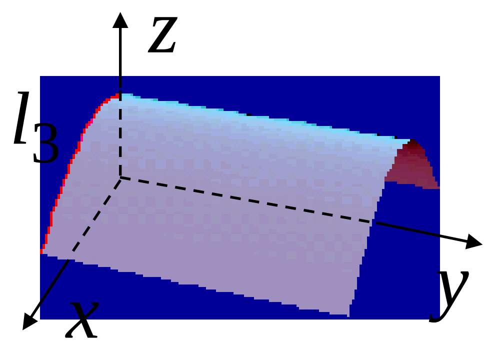
方程 $H(z,x)=0$ 表示**柱面**，

母线 **平行于 y 轴**；

准线 ***xoz* 面上的曲线 l_3.**







柱 面

从柱面方程看柱面的特征：

只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线为 xoy 面上曲线 C（其他类推）

实例

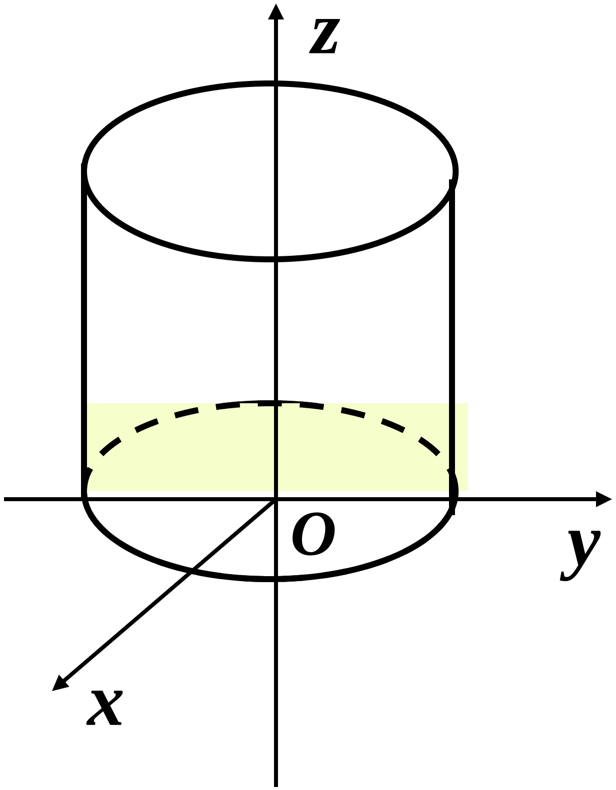
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 椭圆柱面 $//x$ 轴

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ 双曲柱面 $//z$ 轴

$$x^2=2pz$$ 抛物柱面 $//y$ 轴

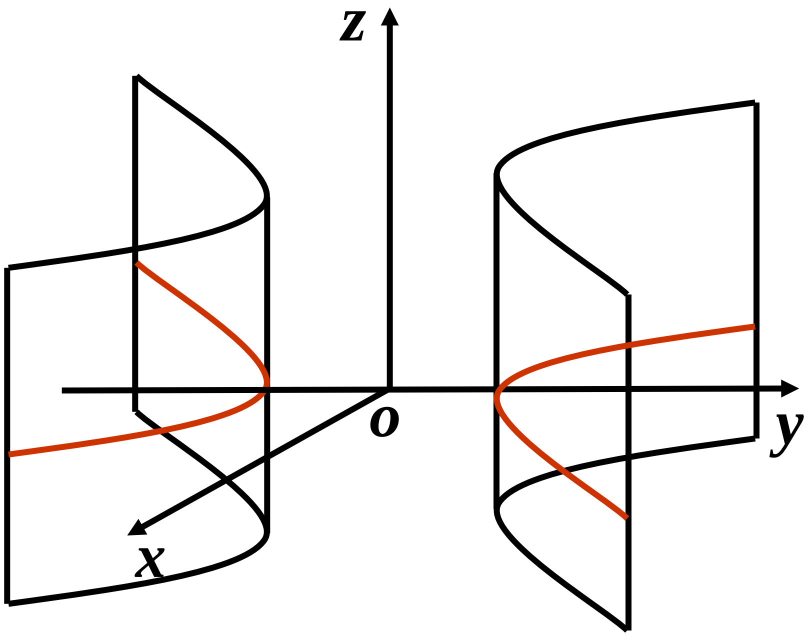
椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



双曲柱面

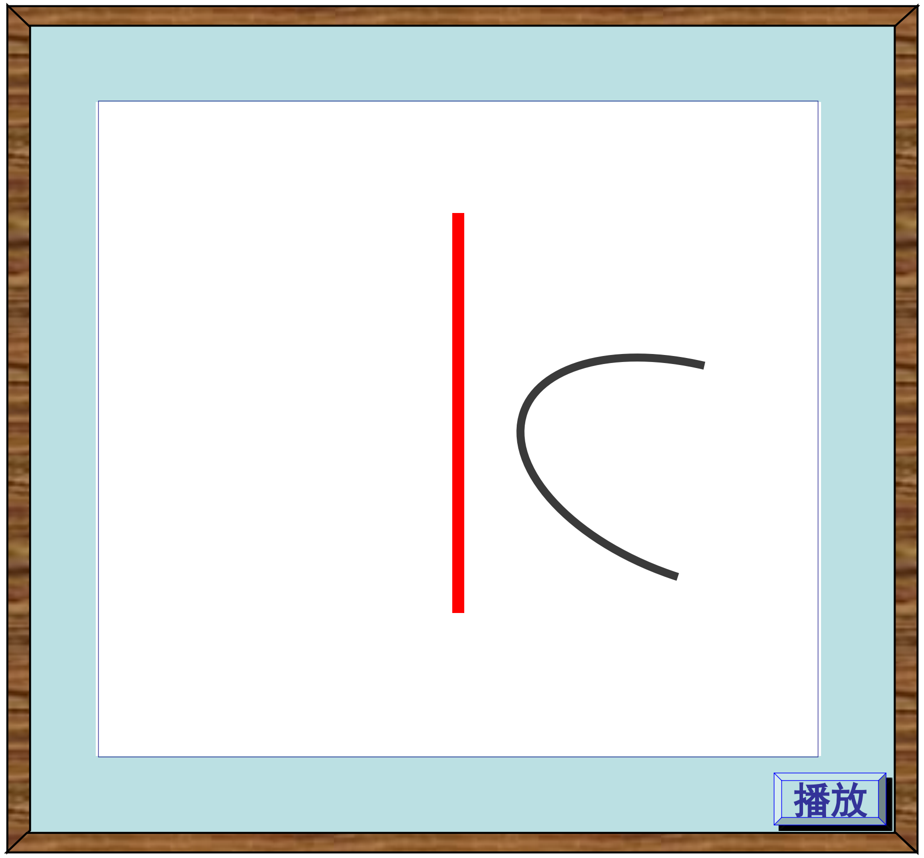
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

这条定直线叫旋转曲面的轴.



旋转曲面

建立*yoz*面上曲线*C* 绕 *z* 轴旋转所成曲面的方程:

给定 *yoz* 面上曲线 **C:** $f(y,z)=0$

若点 $M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 则有

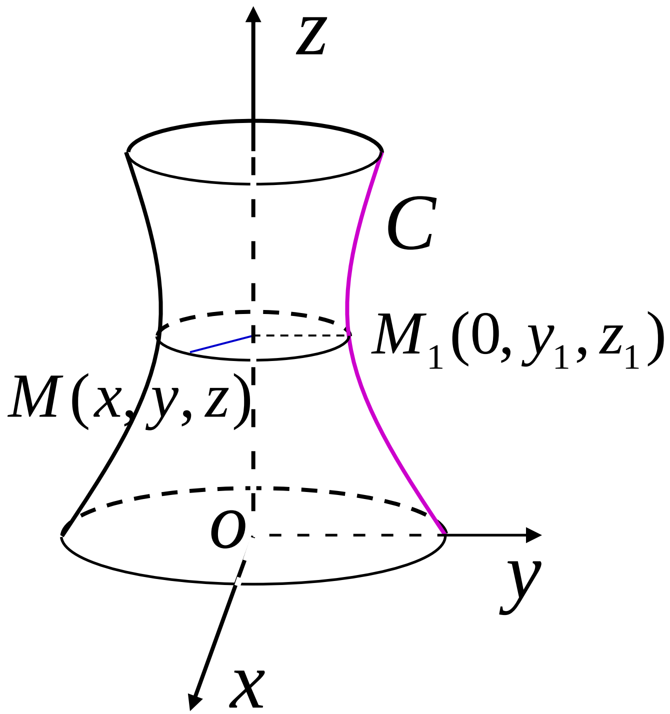
$$f(y_1,z_1)=0$$

当绕 *z* 轴旋转时，该点转到 $M(x,y,z)$, 则有

$$z=z_1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

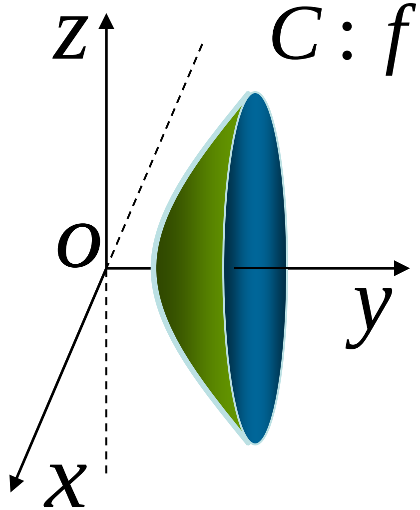
故旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$



旋转曲面

思考：当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$$C: f(y,z)=0$$

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

旋转曲面举例

例6. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α的圆锥面方程.

解: 在*yoz*面上直线*L* 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

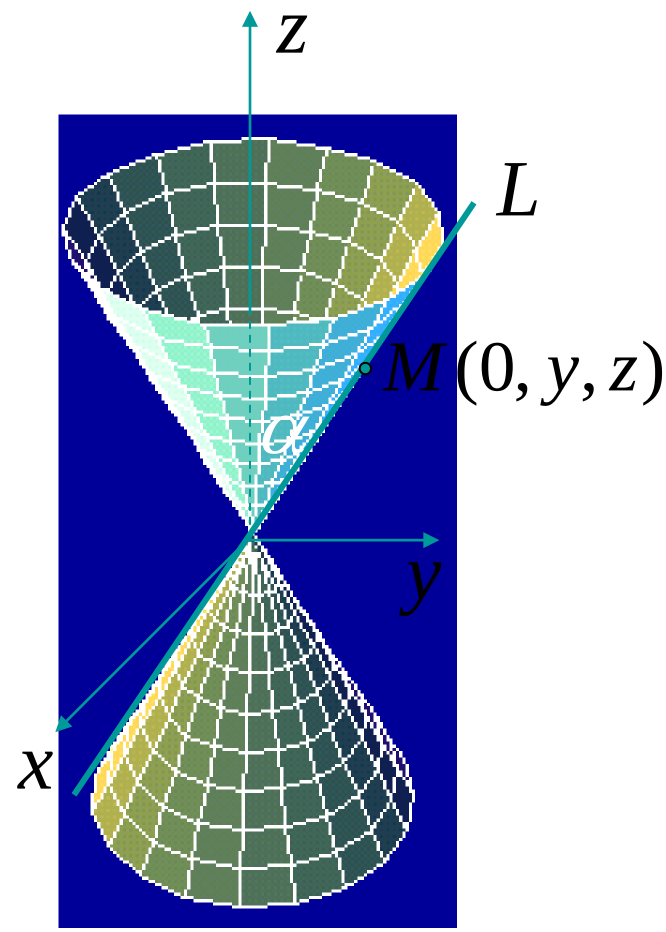
绕z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$

两边平方

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$



例7 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$分别绕$x$轴和 z 轴;

绕x轴旋转 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$

绕z轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转双曲面

旋转曲面举例

（2）椭圆 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴和 z 轴；

绕 y 轴旋转 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面

（3）抛物线 $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴；

$x^2+y^2=2pz$ 旋转抛物面

思考题

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1) $x = 2$;　　　(2) $x^2 + y^2 = 4$;

(3) $y = x + 1$.

思考题解答

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于y轴的直线	平行于yoz面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在$(0,0)$，半径为2的圆	以z轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于z轴的平面

二次曲面

二次曲面的定义：

三元二次方程所表示的曲面称之.

相应地平面被称为一次曲面.

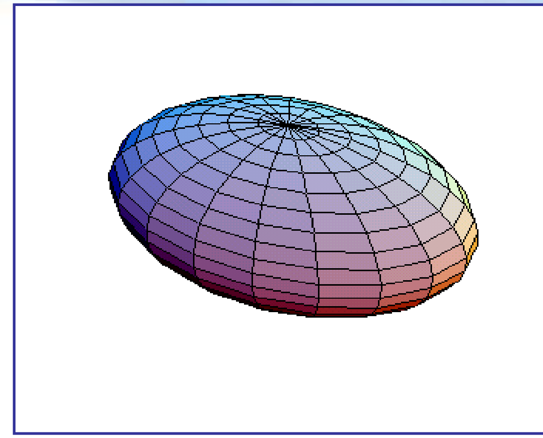
讨论二次曲面性状的截痕法：

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌.

以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面.

二次曲面：椭球面

（一）椭球面

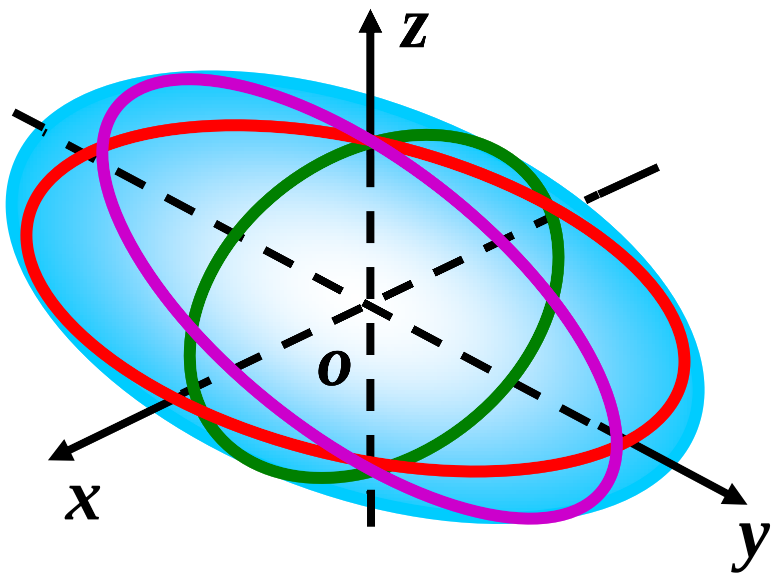


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭球面与三个坐标面的交线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0\end{cases}$$

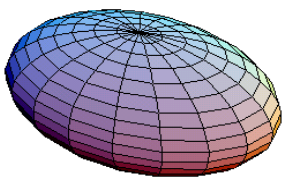
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0\end{cases}, \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ x=0\end{cases}$$



二次曲面：椭球面

椭球面与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1 \\ z=z_1 \qquad\qquad |z_1|<c \end{cases}$$



同理与平面 $x=x_1$ 和 $y=y_1$ 的交线也是椭圆

.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

二次曲面：椭球面

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b,\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

方程可写为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 交线为圆.

二次曲面：椭球面

截面上圆的方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2) \\ z = z_1 \end{cases}$.

(2) $a = b = c$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ 球面

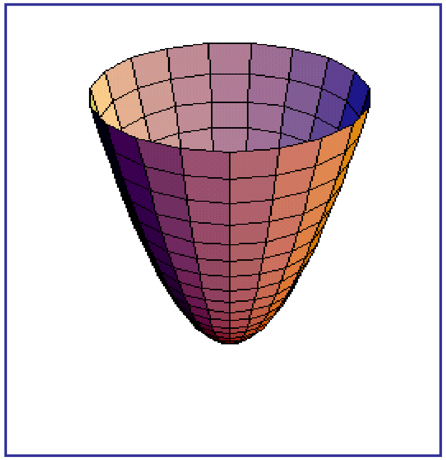
方程可写为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

二次曲面：抛物面

（二）抛物面

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad （p \text{ 与 } q \text{ 同号}）$$

椭圆抛物面

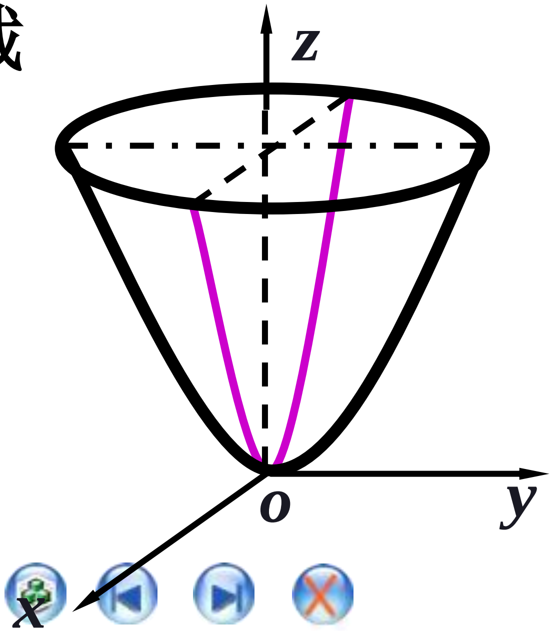


用截痕法讨论：设 $p>0,\ q>0$

（1）用坐标面 $xoy\,(z=0)$ 曲面相截

截得一点，即坐标原点 $O(0,0,0)$

原点也叫椭圆抛物面的顶点.



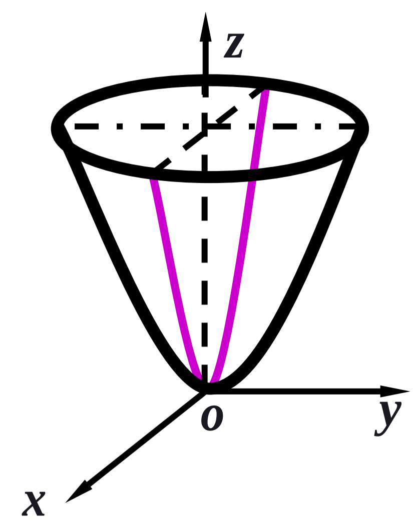
二次曲面：抛物面

与平面 $z = z_1\ (z_1 > 0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1} + \dfrac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与平面 $z = z_1\ (z_1 < 0)$ 不相交.



（2）用坐标面 $xoz\ (y = 0)$ 与曲面相截

截得抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$

二次曲面：抛物面

与平面 $y = y_1$ 的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

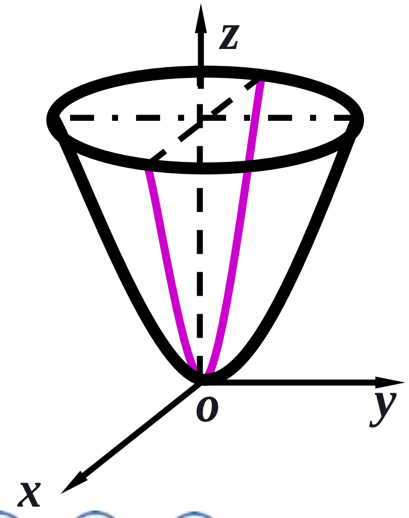
它的轴平行于 z 轴

顶点 $\left(0,\ y_1,\ \dfrac{y_1^2}{2q}\right)$

（3）用坐标面 yoz $(x = 0)$，$x = x_1$ 与曲面相截

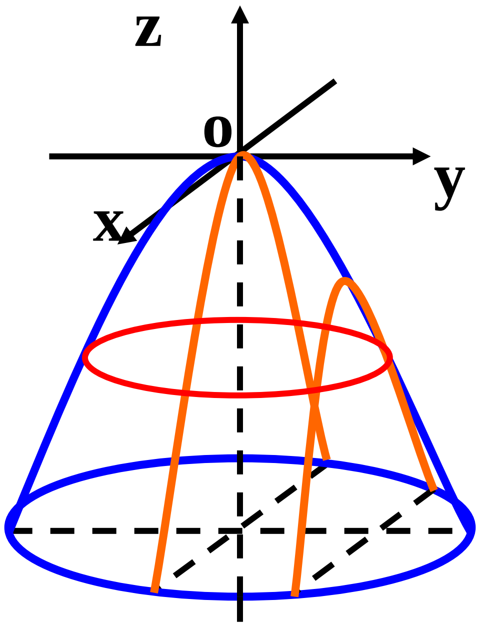
均可得抛物线.

同理当 $p < 0,\ q < 0$ 时可类似讨论.

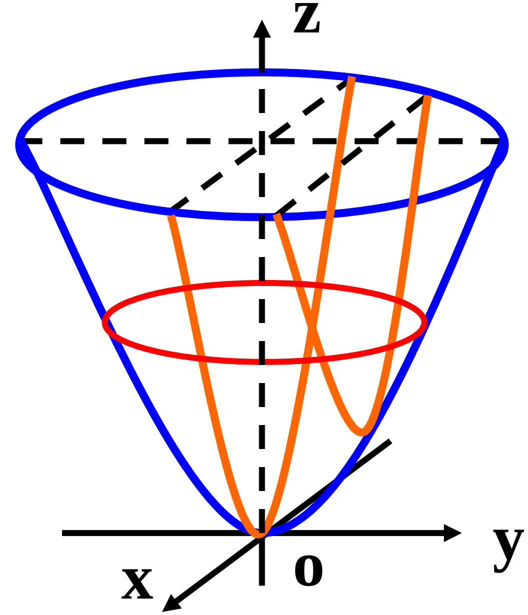


二次曲面：抛物面

椭圆抛物面的图形如下：



$p < 0, \quad q < 0$



$p > 0, \quad q > 0$

二次曲面：旋转抛物面

特殊地：当 $p=q$时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$$ 旋转抛物面

（由 xoz 面上的抛物线$x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

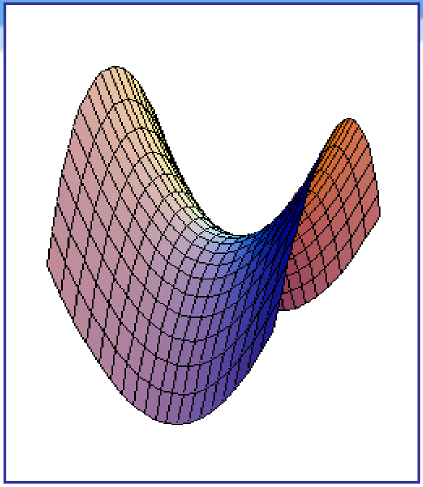
与平面 $z=z_1$ $(z_1>0)$ 的交线为圆.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2pz_1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

当z_1变动时，这种圆的中心都在z轴上.

二次曲面：马鞍面

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$（p 与 q 同号）

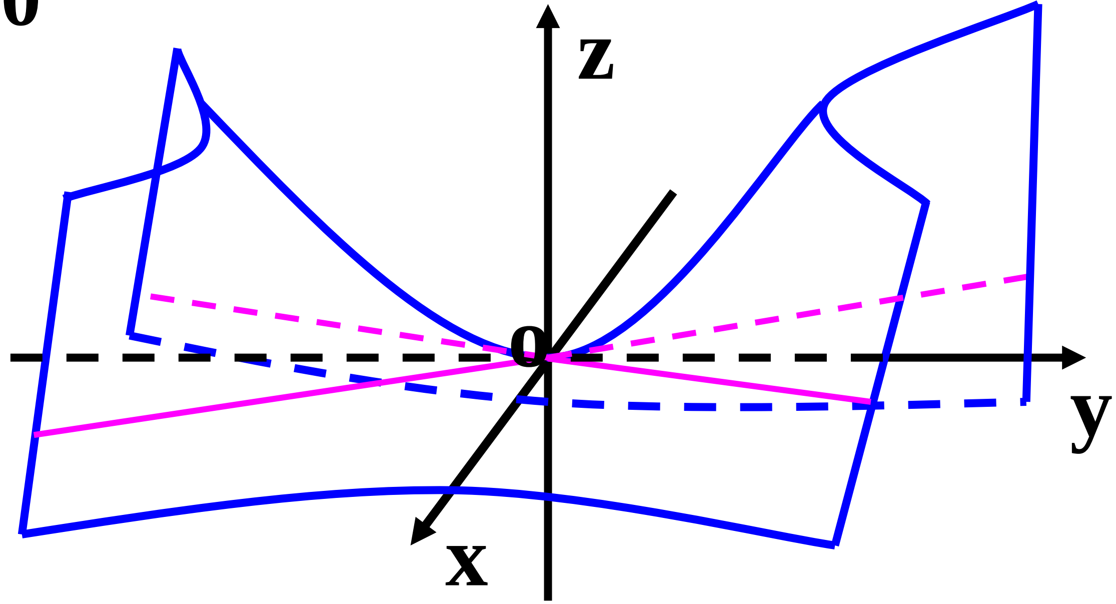


双曲抛物面（马鞍面）

用截痕法讨论：

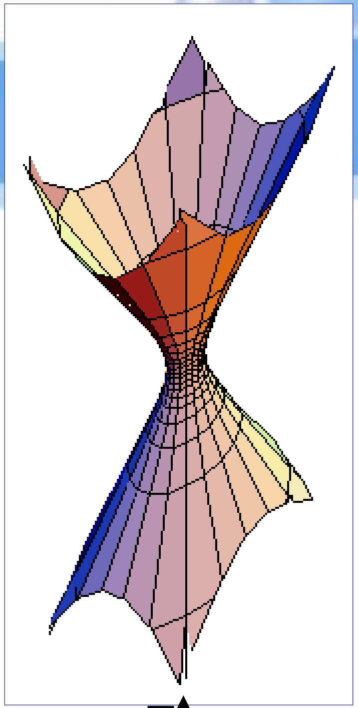
设 $p>0,\ q>0$

图形如下：



（三）双曲面

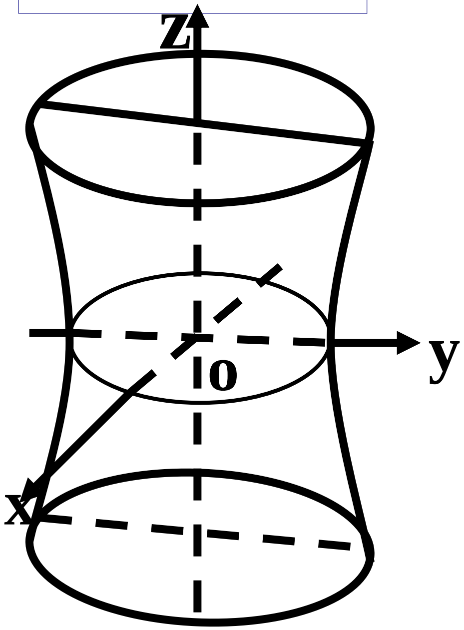
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 单叶双曲面



（1）用坐标面 $xoy(z=0)$ 与曲面相截

截得中心在原点 $O(0,0,0)$ 的椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$



二次曲面：双曲面

与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^{\ 2}}{c^2} \\ z=z_1 \end{cases}$$

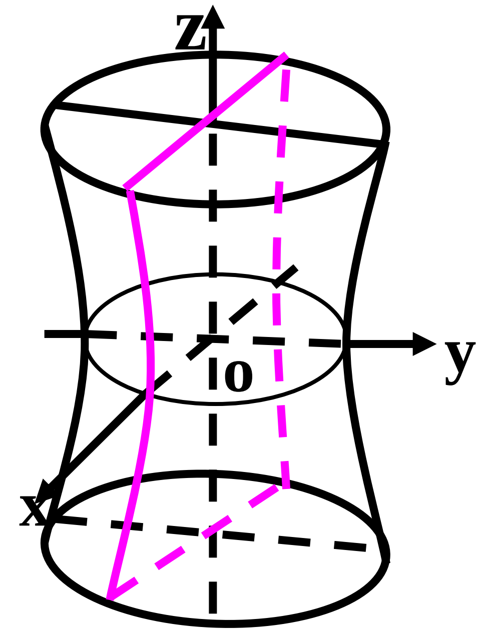
当 z_1变动时，这种椭圆的**中心**都在 z 轴上.

（2）用坐标面 xoz $(y=0)$与曲面相截

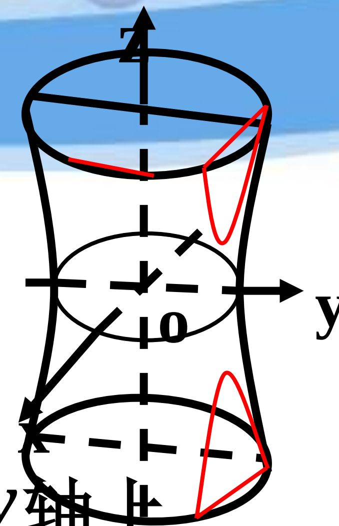
截得中心在原点的双曲线.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

实轴与 x 轴相合，
虚轴与 z 轴相合.



二次曲面：双曲面



与平面 $y = y_1\ (y_1 \neq \pm b)$ 的交线为双曲线.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2} \\ y = y_1 \end{cases}$$

双曲线的**中心**都在 y 轴上.

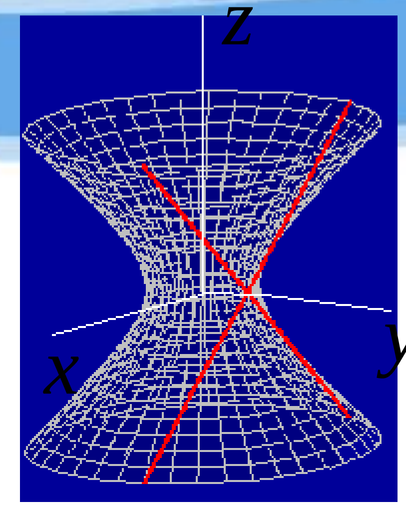
(1′)　$y_1^2 < b^2$，实轴与 x 轴平行，　虚轴与 z 轴平行.

(2′)　$y_1^2 > b^2$，实轴与 z 轴平行，　虚轴与 x 轴平行.

(3′)　$y_1 = b$，截痕为一对相交于点 $(0,b,0)$ 的直线.

二次曲面：双曲面

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\ y=b\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0\\ y=b\end{cases}.$$



(4′) $y_1=-b,$

截痕为一对相交于点 $(0,-b,0)$ 的直线.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\ y=-b\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0\\ y=-b\end{cases}.$$

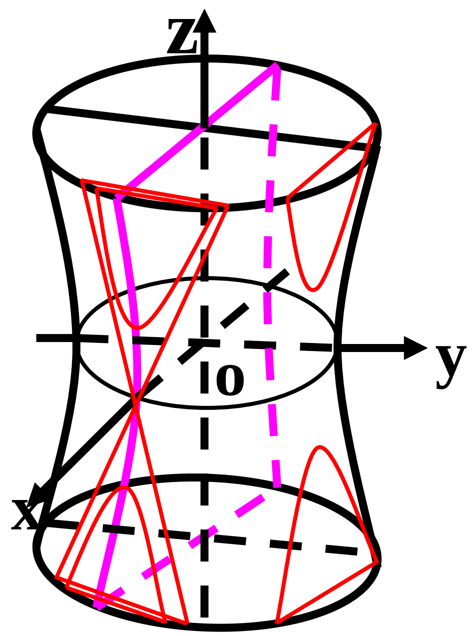
（3）用坐标面 yoz $(x=0)$，$x=x_1$与曲面相截

均可得双曲线.

二次曲面：双曲面

平面$x = \pm a$ 的截痕是**两对相交直线.**

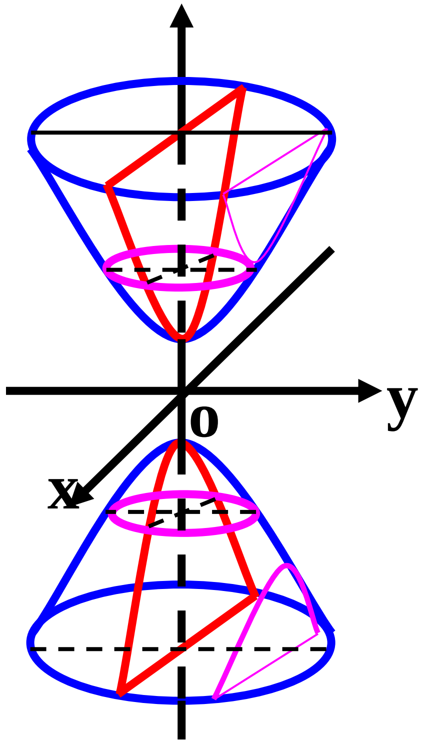
单叶双曲面图形

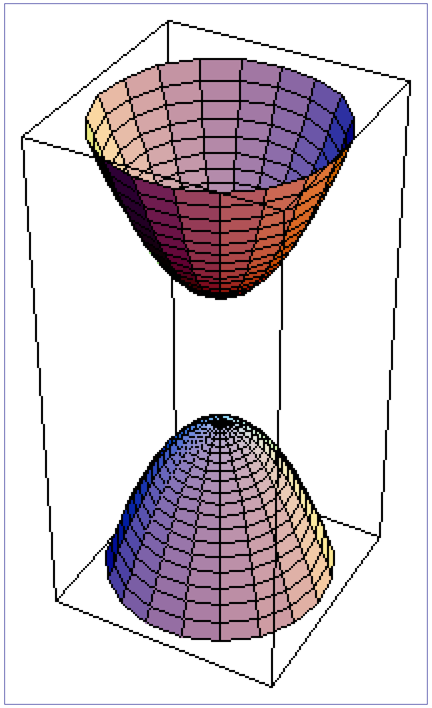


二次曲面：双曲面

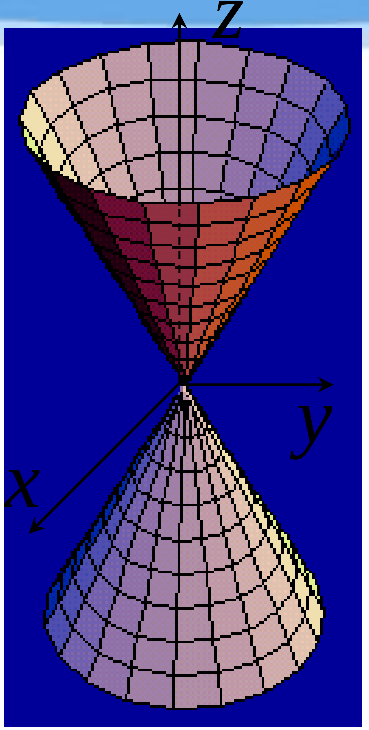
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

双叶双曲面





二次曲面：锥面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a,b\text{ 为正数})$$

在平面 $z=t$ 上的截痕为**椭圆**

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ \ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线 .

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到)

小结

曲面方程的概念 $F(x,y,z)=0$.

旋转曲面的概念及求法.

柱面的概念(母线、准线).

椭球面、抛物面、双曲面、截痕法.

（熟知这几个常见曲面的特性）