高等数学A

第5章 空间解析几何

5.4 平面与空间直线

5.4.1 平面的点法式方程
5.4.2 平面的一般方程
5.4.3 两平面的夹角
5.4.4 空间直线的一般方程
5.4.5 空间直线的对称式方程与参数式方程

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

5.4 平面与空间直线

平面与空间直线

- 平面及其方程
  - 引 例
  - 平面的点法式方程
  - 习例1-2
  - 平面的一般式方程
  - 习例3-5
  - 两平面的夹角
  - 习例6-7
- 空间直线及其方程
  - 引 例
  - 空间直线的一般式方程
  - 空间直线的对称式方程与参数方程
  - 习例8-10

一、平面及其方程

1. 平面方程引例

引例：在空间直角坐标系中，平面具有什么特征？
决定一个平面的要素是什么？

1、两条相交的直线决定一个平面；

2、三个不共线的点决定一个平面；

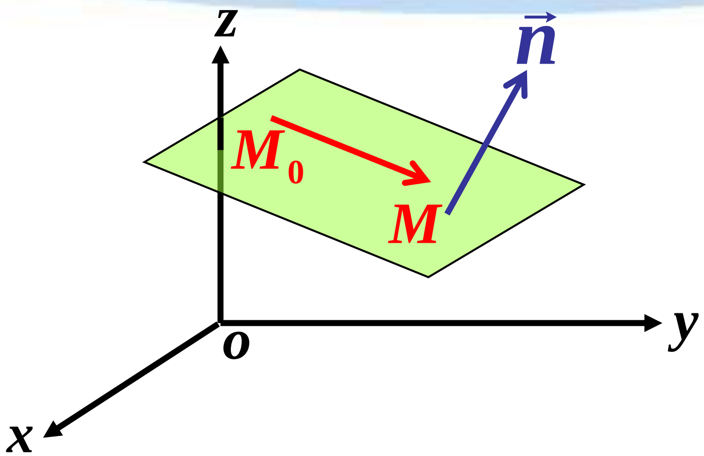
3、两条平行的直线决定一个平面。

4、任给空间中某一点，及某一方向，过该定点且垂直于给定的方向可且只可做一个平面。

以上哪种确定方式易于在空间直角坐标系中用解析式表示？

2. 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法向量.



法向量的特征：垂直于平面内的任一向量.

已知 $\vec{n}=\{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

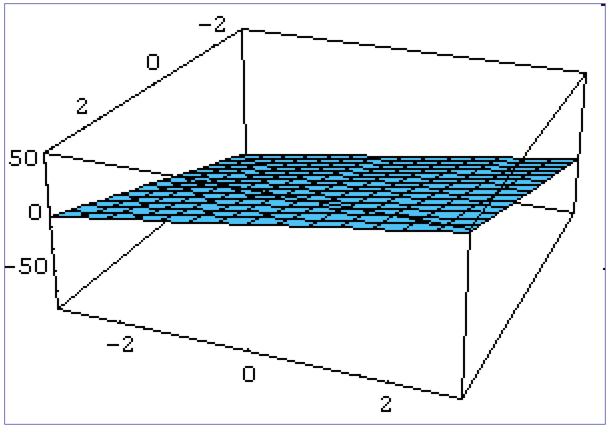
平面上的点都满足上方程，不在平面上的点都不满足上方程，此方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

平面点法式方程习例

例 1 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

例 1 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=\{-3,4,-6\}$

$\overrightarrow{AC}=\{-2,3,-1\}$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{14,9,-1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0$.

一般地，设平面 π 过 M_1, M_2, M_3 三点，M_1, M_2, M_3 不共线. 即 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \vec{0}$.

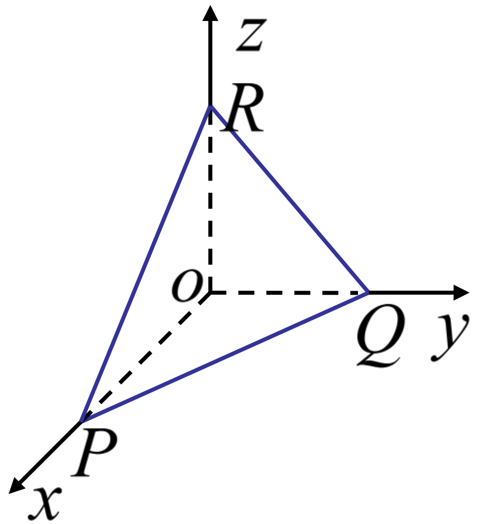
则得平面方程为：$\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$,

即
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

平面的三点式方程

特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0),\ Q(0,b,0),\ R(0,0,c)$$



时, 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$$

此式称为平面的截距式方程.

分析:利用三点式 $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

例 2 求过点(1,1,1)，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

3. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

$Ax+By+Cz+D=0$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴；} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴；} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0$, $C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面平行于xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A = C = 0$, $B = C = 0$ 情形.

平面一般式方程习例

例3　指出下列平面的位置特点，并作出图形:

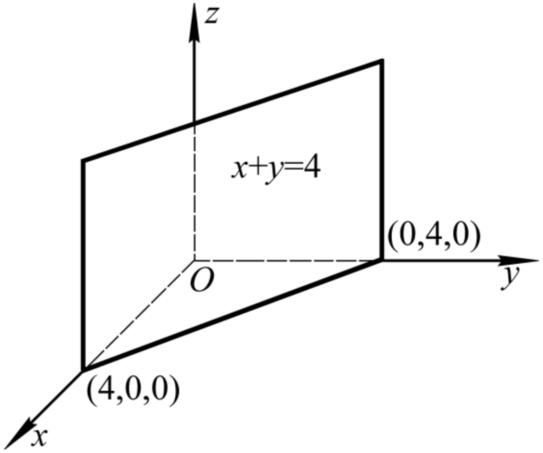
(1)$x+y=4$;　(2)$z=2$.

例 4　设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

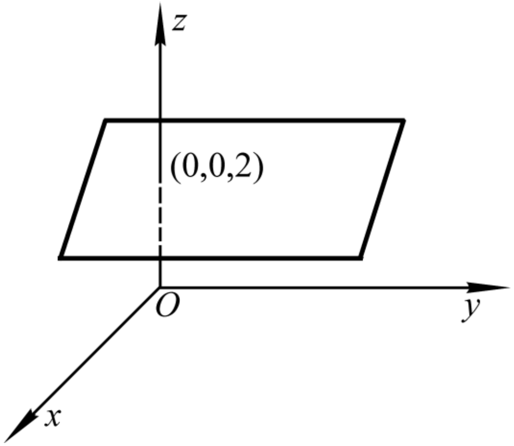
例 5　求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

例3　指出下列平面的位置特点，并作出图形:

(1)$x+y=4$;　(2)$z=2$.



解 (1)式中不含z,所以平面平行于z轴



(2) $z=2$表示过点(0,0,2)且垂直于z轴的平面

例 4 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x - y + 2z = 8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

由平面过原点知 $D = 0$,

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A - 3B + 2C = 0}$

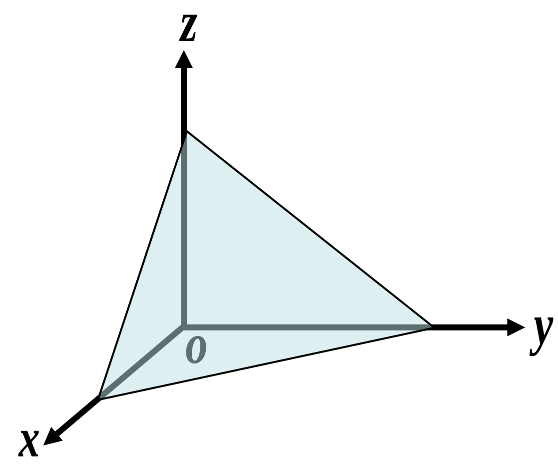
$\because \vec{n} \perp \{4,-1,2\}$, $\quad \therefore \boxed{4A - B + 2C = 0}$

$$\Rightarrow A = B = -\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x + 2y - 3z = 0.$

例 5 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$\because V=1,\quad \therefore\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|abc|=1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件） $\dfrac{1/a}{6}=\dfrac{1/b}{1}=\dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$, 令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right| \Rightarrow |t|=\frac{1}{6}, \Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm 1,\quad b=\pm 6,\quad c=\pm 1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6.$

4. 两平面的夹角

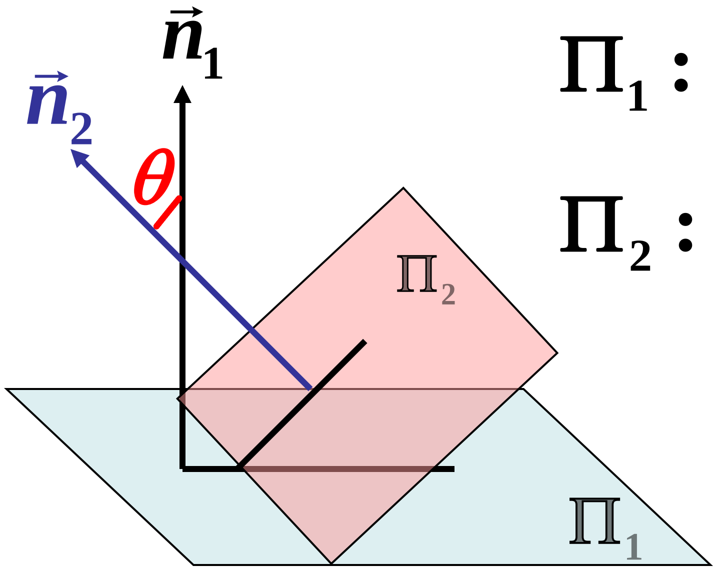
我们目前已对平面本身的解析关系描述得较清楚了. 现在讨论两平面间的关系.

一般说来，两平面的关系有以下几种

- 两平面平行不重合. $\Rightarrow$两平面法向一致但无交点
- 两平面平行重合. $\Rightarrow$两法向一致且有交点
- 两平面不平行相交
  - 两平面垂直
  - 相交但不垂直 $\Rightarrow$两法向不共线也不垂直

桥梁 $\longrightarrow$ 法向夹角

定义　两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

特殊情形:

平行不重合 $\Longleftrightarrow$ $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2\neq D_1:D_2$;

重合 $\Longleftrightarrow$ $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2=D_1:D_2$.

两平面的夹角习例

例6 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

例7 设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

例6 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\quad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\quad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\quad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{D_1}{D_2},$

$\therefore$ 两平面重合.

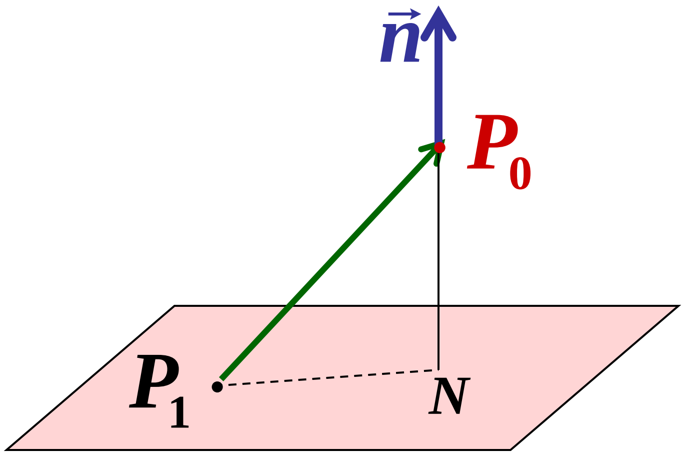
例7 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$

$$d = |\Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$\Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$



$$\overrightarrow{n^0} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\}$$

$$\therefore \operatorname{Pr} j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{n^0}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\because\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore\ \mathrm{Pr}\,j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\therefore\quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式

二、 空间直线及其方程

1. 空间直线方程引例

引例：直线具有什么特征？如何确定一条直线？

(1) 任意一条直线都可以看成是两个平面的交线；

(2) 直线上任意两点的连线与一固定向量平行；

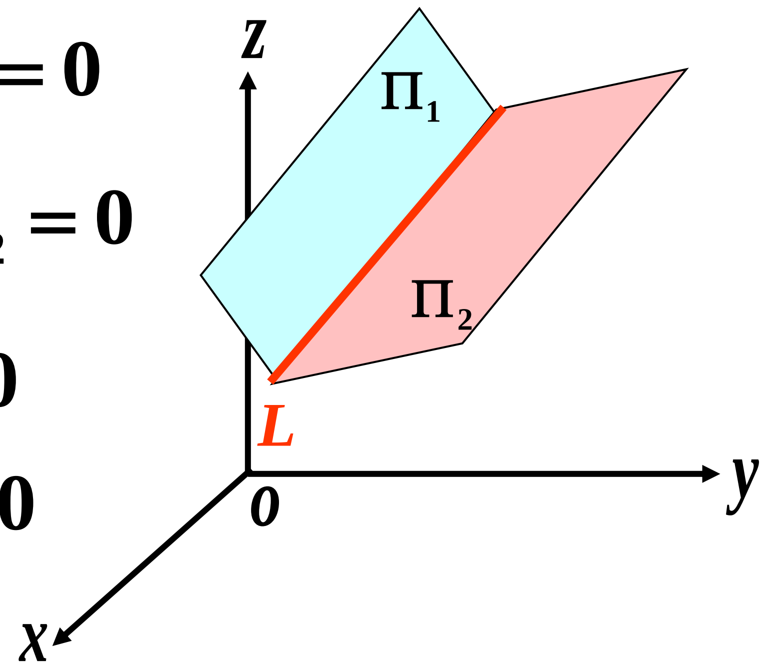
(3) 过一个点且与一个非零向量平行决定唯一一条直线.

2. 空间直线的一般方程

定义　空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

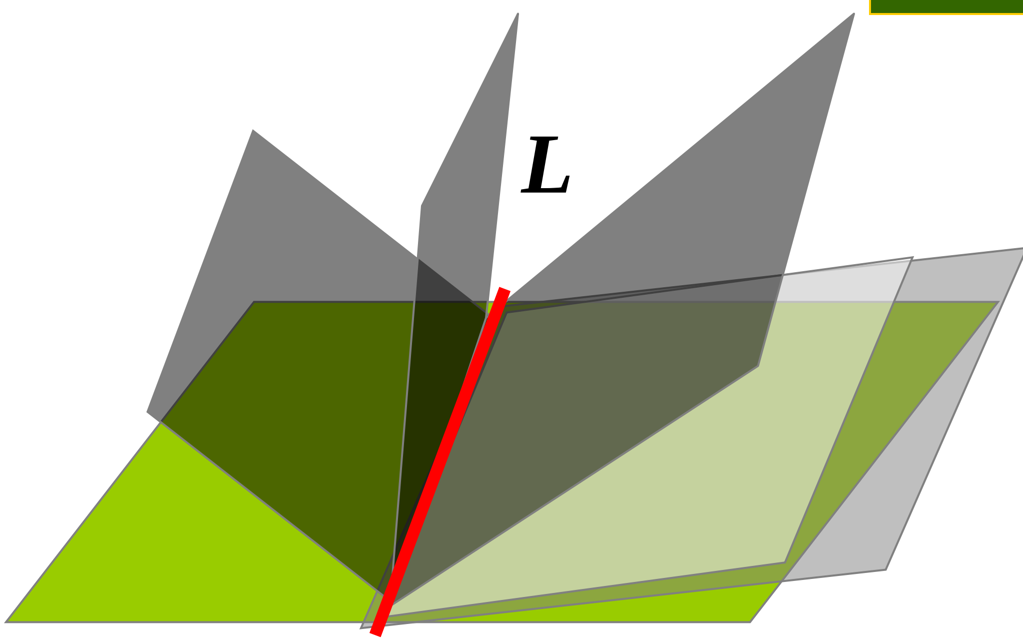
空间直线的一般方程

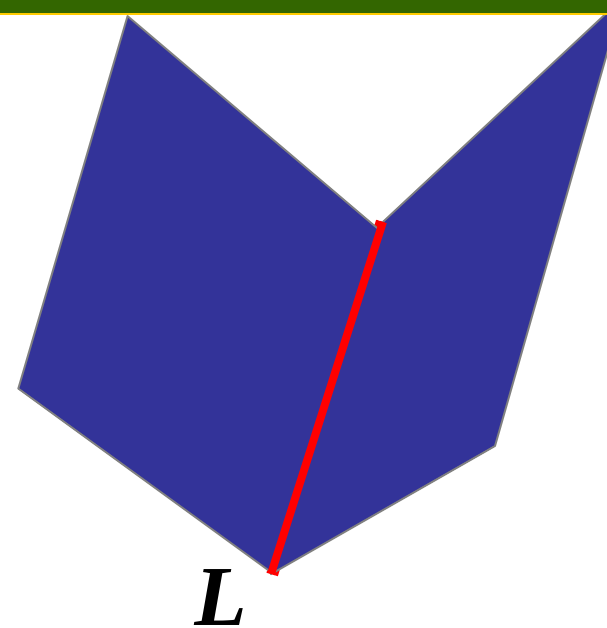
所以直线方程不唯一.

例如: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 表示y轴;

$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ 也表示y轴.

- 通过空间直线L的平面
个，从中任两个方程联立
空间直线L。

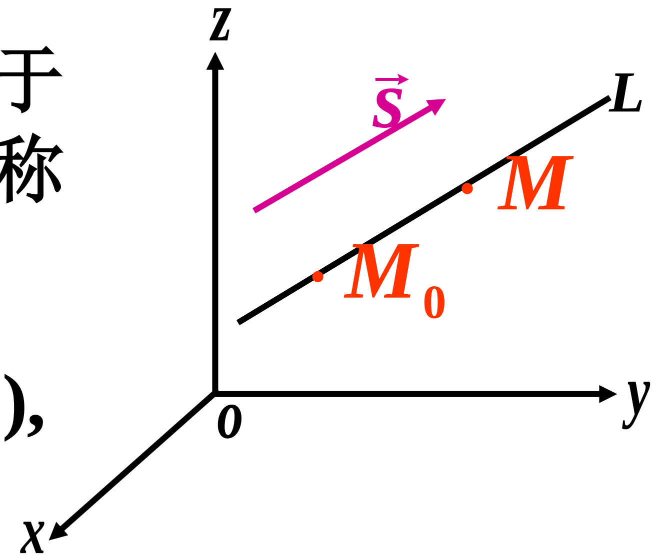




3. 空间直线的对称式方程与参数方程

方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的方向向量.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$,

$\forall M \in L$, $\overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$

$\vec{s} = \{m, n, p\}$, $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的对称式方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

直线的一组方向数

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

直线的参数方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

当m,n,p中有一个为0时, 例如$m=0$

此时方程应理解为$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$

当m,n,p中有两个为0时, 例如$m=0,n=0$

此时方程应理解为$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}$

即直线方程为 $$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}$$

应理解为 $$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

空间直线方程习例

例8 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

例9 求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

例 10 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和y轴垂直相交，求其方程.

例8 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0=0,\quad z_0=-2$

点坐标$(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{4,-1,-3\}$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

解题思路: 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

特例: 若直线的一般式方程中缺少变量，则可直接变形为点向式方程及参数式方程，例如

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ y-3z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=-2y+2 \\ y-1=3z+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3} \\ \dfrac{y-1}{3}=z+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-3t \\ z=-1-t \end{cases}$$

例9　求过两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线的方程.

解　可以取两点的方向向量

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

由直线的标准方程可知,过这两点的直线

方程为$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

称为直线的两点式方程.

例 10 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$,

所求直线方程 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$