高等数学A

第5章 空间解析几何

5.3 向量的数量积、向量积及混合积

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

5.3 向量的数量积、向量积及混合积

5.3.1 向量数量积

- 引　例
- 定　义
- 向量数量积的投影表示
- 向量数量积的基本性质
- 向量数量积的坐标表示
- 向量数量积举例

5.3.2 向量积

- 引　例
- 定　义
- 向量积基本性质
- 向量积的坐标表示
- 向量积举例

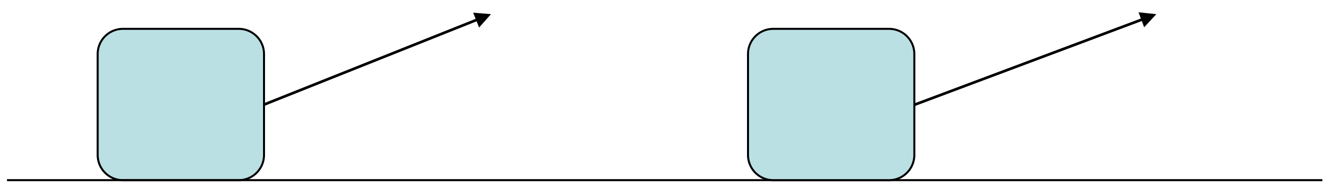
5.1.3 向量的混合积

- 定　义
- 向量混合积举例

向量数量积引例

引 例：如图所示，人在路面上用绳子拉一个物体，绳子上的力F与路面成的角为 θ ，物体产生的位移为 S，则对物体作的功为

$$W = |F| \cdot |S| \cos\theta$$



注意：两向量作这样的运算, 结果是一个数量.

向量数量积的定义

一、两向量的数量积定义

定义 **向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积为$\vec{a}\cdot\vec{b}$**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

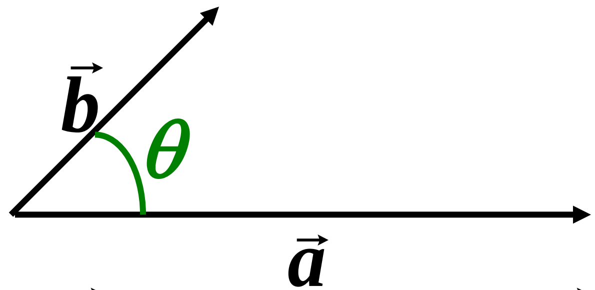
(其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

注意：向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$的数量积表示为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$。

如果 $\vec{a}=\vec{0}$ 与 $\vec{b}=\vec{0}$ ，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 。

向量数量积的投影表示

二、数量积的投影表示



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\because\ |\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{Pr}\,j_a\vec{b},\qquad |\vec{a}|\cos\theta=\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a},$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}=|\vec{a}|\,\mathrm{Pr}\,j_a\vec{b}.$$

结论　两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

数量积也称为"点积"、"内积".

关于数量积的说明：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

证 $\because \theta=0,\quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

证 $(\Rightarrow)$ $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ |\vec{a}|\neq 0,\ |\vec{b}|\neq 0,$

$\therefore \cos\theta=0,\quad \theta=\dfrac{\pi}{2},\quad \therefore \vec{a}\perp\vec{b}.$

$(\Leftarrow)$ $\because \vec{a}\perp\vec{b},\quad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{2},\quad \therefore \cos\theta=0,$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0.$

向量数量积的基本性质

特别地： $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$

4.数量积符合下列运算规律：

（1）交换律: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$

（2）分配律: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c};$

（3）若 λ 为数： $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),$

若 λ、μ为数： $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}).$

向量数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},\quad \therefore \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\because |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

数量积的坐标表达式

数量积的坐标表达式的应用

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

① $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

两向量夹角余弦的坐标表示式

由此可知两向量垂直的充要条件为

② $$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

③ $$\Pr j_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\quad 或 \Pr j_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

数量积举例与练习

例 1 已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

例 2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

例3 设$\vec{\alpha},\vec{\beta}$为任意向量，证明

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

数量积举例与练习

例 1 已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}$ $\qquad \therefore \mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

数量积举例与练习

例 2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证

$$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

数量积举例与练习

例3 例1.3.2 设$\vec{\alpha},\vec{\beta}$为任意向量，证明

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

证明: $\because|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

$$=|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2$$

而$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

$\therefore|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2\le|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2$

即$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

数量积举例与练习

练习

P18-3设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，且 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, 求 $|\vec{a}-\vec{b}|$.

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$

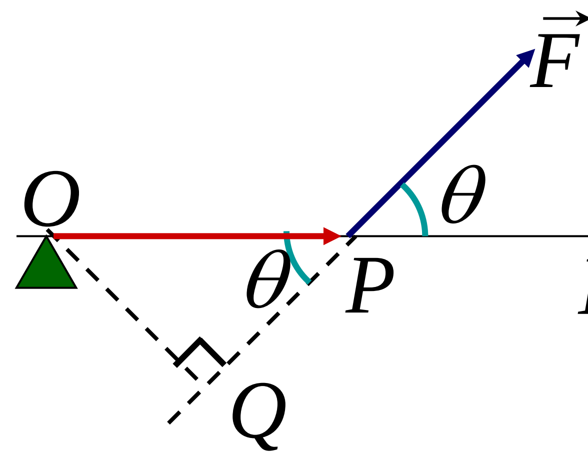
解 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=2-6\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+9=17$$

向量积引例

引例. 设O为杠杆L的支点，有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$：

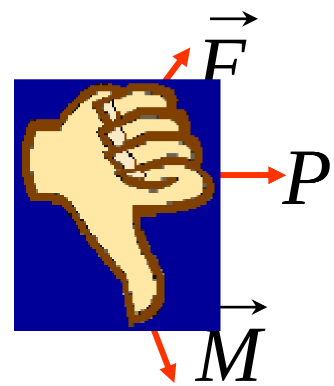
$$\left|\vec{M}\right| = \left|OQ\right|\left|\vec{F}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta$$



$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\vec{M} \perp \vec{F}$



$$\left|OQ\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\theta$$

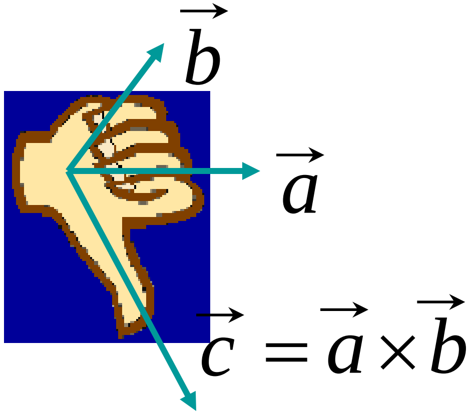
向量积的定义

设$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，定义

$$\text{向量}\ \vec{c}\begin{cases}\text{方向}:\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\ \text{且符合右手规则}\\ \text{模}:|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$$

称$\vec{c}$为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，记作

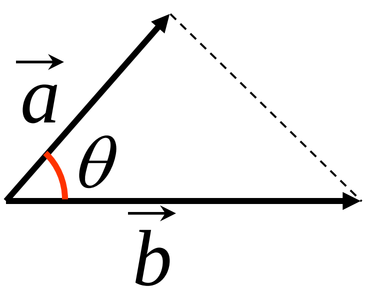
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\quad(\text{叉积})$$



引例中的力矩 $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{F}$

思考：右图三角形面积

$$S=\underline{\ \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\ }$$



向量积的性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.\qquad (\because \theta=0\Rightarrow \sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.\qquad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

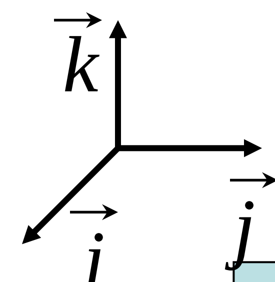
证 $(\Rightarrow)\ \because \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},\quad |\vec{a}|\neq 0,\quad |\vec{b}|\neq 0,$

$\therefore \sin\theta=0,\quad \theta=0,\quad \vec{a}//\vec{b}$

$(\Leftarrow)\quad \because \vec{a}//\vec{b}\qquad \therefore \theta=0$或$\pi\quad \therefore \sin\theta=0$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0.$

特别地： $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$



$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

向量积的性质

向量积满足下列运算规律：

（1） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

（3）若 λ 为数：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

向量积的坐标表达式

向量积的坐标表示

向量积还可用三阶行列式表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

由上式可推出

$$\vec{a}//\vec{b}\iff\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

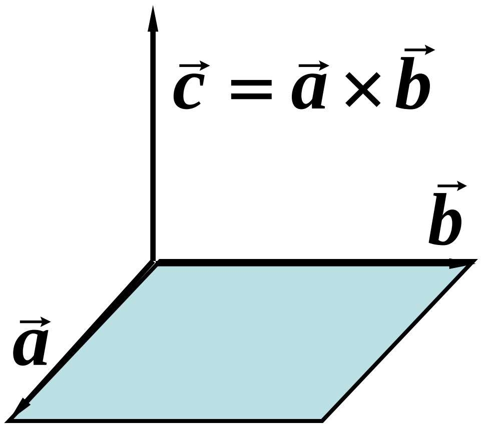
b_x、b_y、b_z不能同时为零，但允许两个为零，

例如，$\dfrac{a_x}{0}=\dfrac{a_y}{0}=\dfrac{a_z}{b_z}\Rightarrow a_x=0,\ a_y=0$

向量积的坐标表示

补充

$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和 $\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.



向量积举例解答

例 3 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

例 4 在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

例 5 设向量$\vec{m},\vec{n},\vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且$|\vec{m}|=4$，$|\vec{n}|=2$，$|\vec{p}|=3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

向量积举例解答

例 3　求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{c^0}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

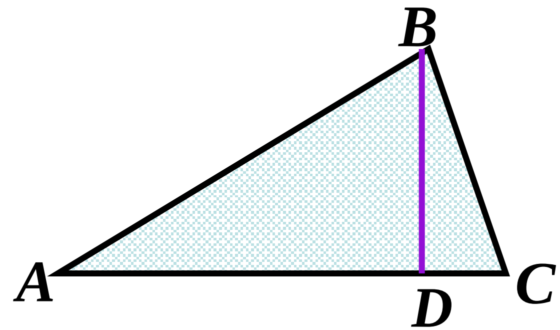
向量积举例解答

例 4　在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

解　$\overrightarrow{AC}=\{0,4,-3\}$

$\overrightarrow{AB}=\{4,-5,0\}$

三角形ABC的面积为



$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|BD|$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot|BD|\qquad\therefore|BD|=5.$$

向量积举例解答

例 5　设向量 $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ 两两垂直，符合右手规则，且 $|\vec{m}|=4$，$|\vec{n}|=2$，$|\vec{p}|=3$，计算 $(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解　$|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\widehat{\vec{m},\vec{n}})$

$=4\times2\times1=8,$

依题意知 $\vec{m}\times\vec{n}$ 与 $\vec{p}$ 同向,

$\therefore\theta=(\widehat{\vec{m}\times\vec{n},\vec{p}})=0$

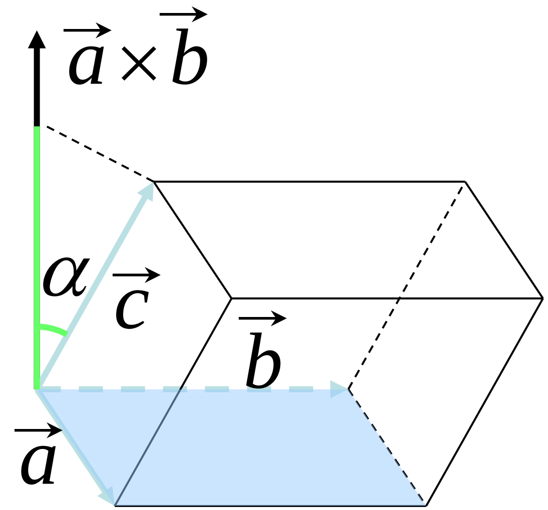
$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta=8\cdot3=24.$

向量的混合积

定义 已知三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 称数量

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} \xlongequal{\text{记作}} (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的**混合积**.



几何意义

以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体, 则其

底面积 $A=|\vec{a}\times\vec{b}|$, 高 $h=|\vec{c}|\,|\cos\alpha|$

故平行六面体体积为

$$V=Ah=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\,|\cos\alpha|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$

混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

混合积的性质

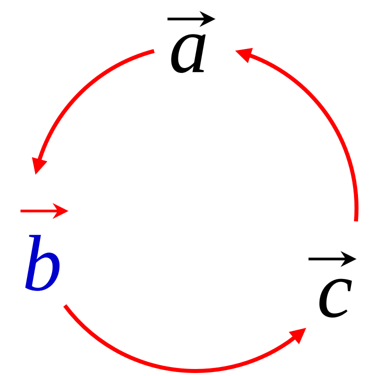
(1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件是

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

(2) 轮换对称性：

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

(可用三阶行列式推出)



保持三矢的循环次序(逆时针)，$\times$ 号可以与 $\cdot$ 号互换而混合积不变.

向量混合积举例

例6 已知$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

例7 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k,y_k,z_k)$ $(k=1,2,3,4)$，求该四面体体积 .

例8. 证明四点 $A(1,1,1)$, $B(4,5,6)$, $C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$共面 .

向量混合积举例解答

例6　已知 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=2$，

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解　$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

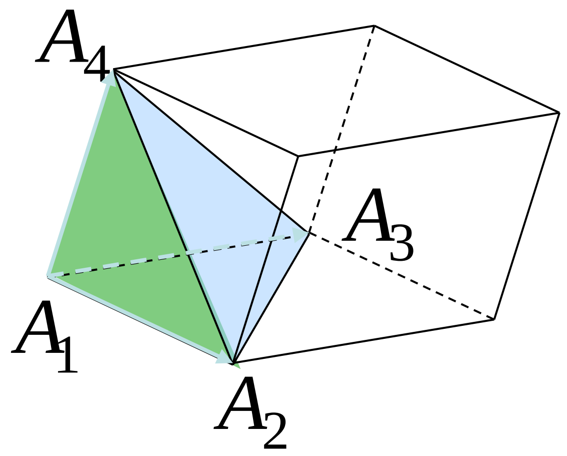
$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=4.$$

向量混合积举例解答

例7 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$，求该四面体体积.

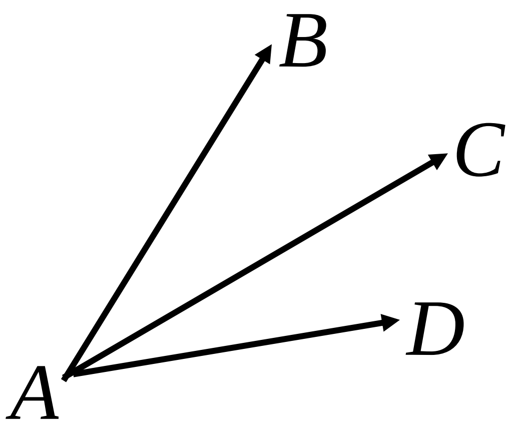
解: 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$，故



$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4})\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

例8. 证明四点 $A(1,1,1), B(4,5,6), C(2,3,3)$, $D(10,15,17)$共面 .



解: 因 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 A, B, C, D 四点共面 .

四、小结

向量的数量积（结果是一个数量）

向量的向量积（结果是一个向量）

向量的混合积（结果是一个数量）

（注意共线、共面的条件）

向量

- 加法 $\alpha+\beta$
- 数乘 $\lambda\alpha$

  封闭性

- 内积 $\alpha\cdot\beta$
  - 基本定义
    - 对称性
    - 齐次性
    - 线性
    - 本身内积非负性

      向量模 $|\alpha|$
  - 运算法则

三维向量 $\xleftrightarrow{\text{空间直角坐标系}}$ 空间中点

数量积 $\alpha \cdot \beta$

$\alpha \Leftrightarrow (x, y, z) \xleftrightarrow{\text{基表示}} xi + yj + zk$

- 一种内积
- 向量间夹角 $\cos(\widehat{\alpha,\beta}) = \dfrac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|} \longrightarrow$ 垂直关系
- 方向余弦与方向角 $\cos(\widehat{\alpha,i}) = \dfrac{\alpha\cdot i}{\|\alpha\|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- 向量在轴上的投影 $\mathrm{Proj}_u\,\alpha \xlongequal[\|\vec{u}^0\| = 1]{\vec{u}^0 // u\text{轴}} \alpha\ \vec{u}^0$

向量积 $\alpha \times \beta$

- 性质
  - 分配律
  - 交换律 ✗
- 平行关系 $\alpha \times \beta = 0$
- 平面三角形面积计算 $\|\dfrac{1}{2}\alpha\times\beta\|$
- 平行四边形面积计算 $\|\alpha\times\beta\|$

公式、性质小结

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系:

$$\vec{a} // \vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \rightleftarrows \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightleftarrows a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{共面} \rightleftarrows (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$$

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

一、填空:

1.设 $\vec{a}=(3,2,-1),\vec{b}=(1,-1,2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$， $2\vec{a}\times\vec{b}=$ $\underline{(6,-14,-10)}$

2. 设 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3,\vec{a}\times\vec{b}=(1,1,1)$,则 $(\hat{a,b})=$ $\underline{\quad \frac{\pi}{6} \quad}$.

3. 设 $|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=2,(\hat{a,b})=\frac{\pi}{4}$,则当 $k=$ $\underline{\quad \mathbf{-1} \quad}$时，向量 $3\vec{a}+k\vec{b}$ 和 $\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直.

4. 设 $\vec{a}=(3,2,1),\vec{b}=(2,\frac{4}{3},k)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$,则 $k=$ $\underline{\quad -\frac{26}{3} \quad}$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$,则 $k=$ $\underline{\quad \frac{2}{3} \quad}$,

5．已知 $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}=(1,2,1)$ 和 $\vec{b}=(-1,1,1)$，并满足 $\vec{c}\cdot(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=8$，则 $\vec{c}=$ $\underline{\quad (1,-2,3) \quad}$.

二、已知$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,(\hat{a,b})=\dfrac{2\pi}{3}$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$.

三、设$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=3$，求$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

四、设向量$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求同时垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$单位向量.

五、已知$|\vec{a}|=2\sqrt{2},|\vec{b}|=3,(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$，$\vec{A}=5\vec{a}+2\vec{b},\vec{B}=\vec{a}-3\vec{b}$，求：

（1）向量$\vec{A}$在向量$\vec{B}$上的投影 $\vec{A}\cdot\vec{B}=(5\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=5|\vec{a}|^2-13\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=-92$

（2）以$\vec{A}$，$\vec{B}$为边的平行四边形的面积S.