高等数学A2

学习建议: (1)多看书(利用导学预习和课后温习).

(2)多做习题(不是题海战),多总结与抽象.

作业: 一周一次(每周一交).(作业纸)

平时成绩(50%)+期末卷面成绩(50%)=最终成绩.

平时考核：考勤10%，互动20%，作业30%，测验40%

考勤不设基础分，缺课一次扣5分；

作业设基础分18分，缺交作业一次扣2分，合格不扣分，不合格（如不写解题过程，无自批改等）扣2分，优秀加1分；

互动设基础分12分（若缺课同时扣互动分2分），按小组完成导学、参与课堂互动，每次加2分-5分；

测验4次，每次按百分制得分后除以10即为所得分数，满分10分/次。

高等数学A2

第5章 空间解析几何

5.1 向量及其线性运算
5.2 空间直角坐标系与向量坐标表示

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

这一章，我们为学习多元函数微积分学作准备，介绍空间解析几何和向量代数。这是两部分相互关联的内容。用代数的方法研究空间图形就是空间解析几何，它是平面解析几何的推广。向量代数则是研究空间解析几何的有力工具。这部分内容在自然科学和工程技术领域中有着十分广泛的应用，同时也是一种很重要的数学工具。

解析几何:几何学方法论的学科.

- **解析几何的基本思想:**

  用代数的方法来研究几何.

- **解析几何的基本方法:**

  建立几何上的对象与代数对象之间的一一对应. 用代数的方法研究几何图形.

(1)建立向量与几何对象(向量与有向线段)建立一一对应.

(2)建立坐标系，空间的几何对象(点)就可以用代数对象(有序数对)表示.

本章先介绍向量概念、然后引入空间直角坐标系，接着以向量代数为工具，把点和有序数组、空间图形和代数方程联系起来，建立起对应关系，给数和代数方程以几何直观意义，从而可以利用代数方法研究空间图形的性质和相互关系。重点讨论空间基本图类——平面，直线，常用的二次曲面和曲线。

重点

向量及其坐标表示

向量的数量积，向量积

直线与平面方程

5.1 向量及其线性运算
5.2 空间直角坐标系与向量坐标表示

向量线性运算及其坐标表示

- 5.1.1 引 例
- 5.1.2 向量的概念
  - 定义
  - 向量的表示
  - 向量的模、单位向量与零向量等
- 5.1.3 向量的线性运算
  - 向量的加减法及运算规律
  - 向量的数乘法及运算规律
- 5.1.4 向量线性运算举例　例1、2
- 5.2.1 空间直角坐标系
- 5.2.2 向量的坐标
  - 向量的坐标表示与运算　例3
  - 向量的模、方向角、投影
  - 例4　例5　例6　例7

引 例：如图所示，一质量为m的物体受到外力F的作用做直线运动，不计摩擦力.

（1）物体的加速度是多少？方向如何？

（2）物体在t时刻的速度是多少？方向如何？

（3）经过t时间物体的位移等于多少？方向如何？

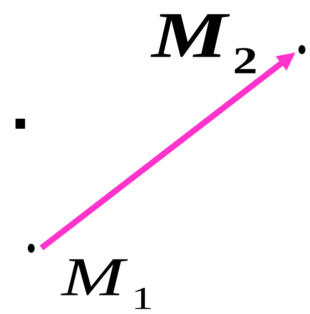
答案：（1）$a=F/m$, 方向向右；

（2）$v=v_0+at$, 方向向右；

（3）$s=v_0t+at^2/2$, 向右移动。

向量的定义

向量的定义:



定义5.1.1 既有大小又有方向的量叫做向量（或矢量）.

注意：向量除了与标量一样有大小以外，还有方向.

向量的表示

常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量.

有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.

以M_1为起点、M_2为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$

也用一个黑体字母（书写时，在字母上面加箭头）来表示向量.

例如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$或$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$等等.

向量的相关概念

1. 向量的模：向量的大小或长短，$|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$.

2. 单位向量：模为1的向量，$\overrightarrow{a^0}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2{}^0}$.

3. 零向量：模为0的向量，$\vec{0}$.

4. 自由向量：不考虑起点位置的向量.

向径：起点在原点的向量.

5. 相等向量：大小相等且方向相同的向量.

6. 负向量：大小相等但方向相反的向量.

6. 共线向量:

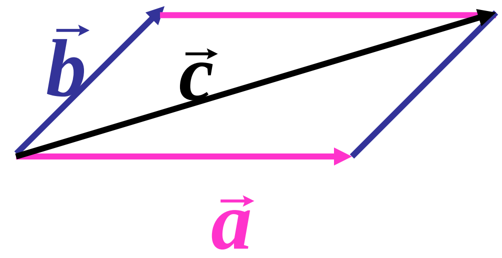
若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行, 记作$\vec{a} \parallel \vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;

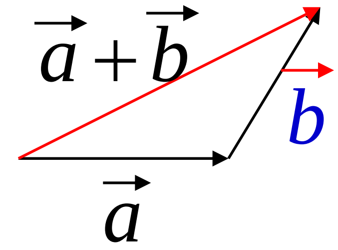
因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量**共线** .

若 $k(\geq 3)$ 个向量经平移可移到同一平面上, 则称此k个向量**共面** .

向量的加减法

1 加法： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

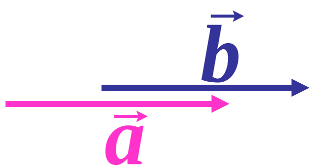


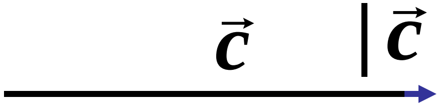


（平行四边形法则）

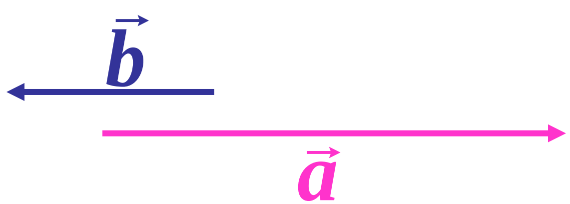
（平行四边形法则有时也称为三角形法则）

特殊地：若 $\vec{a}//\vec{b}$ 分为同向和反向





$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$



$|\vec{c}|=\big||\vec{a}|-|\vec{b}|\big|$

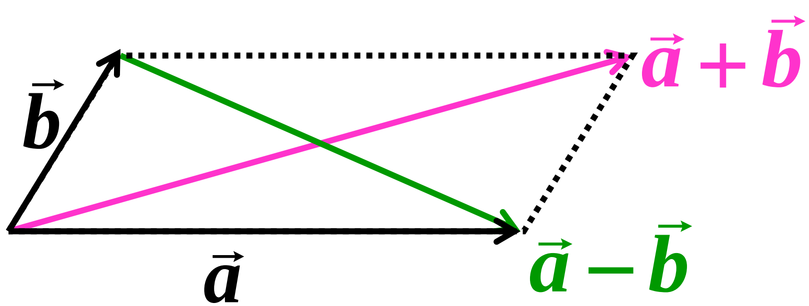
向量的加法符合下列运算规律：

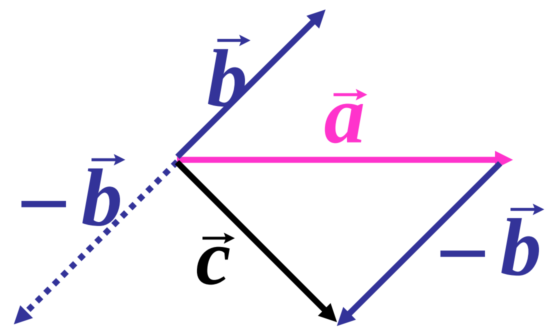
（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

（2）结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$

（3） $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

2 减法： $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

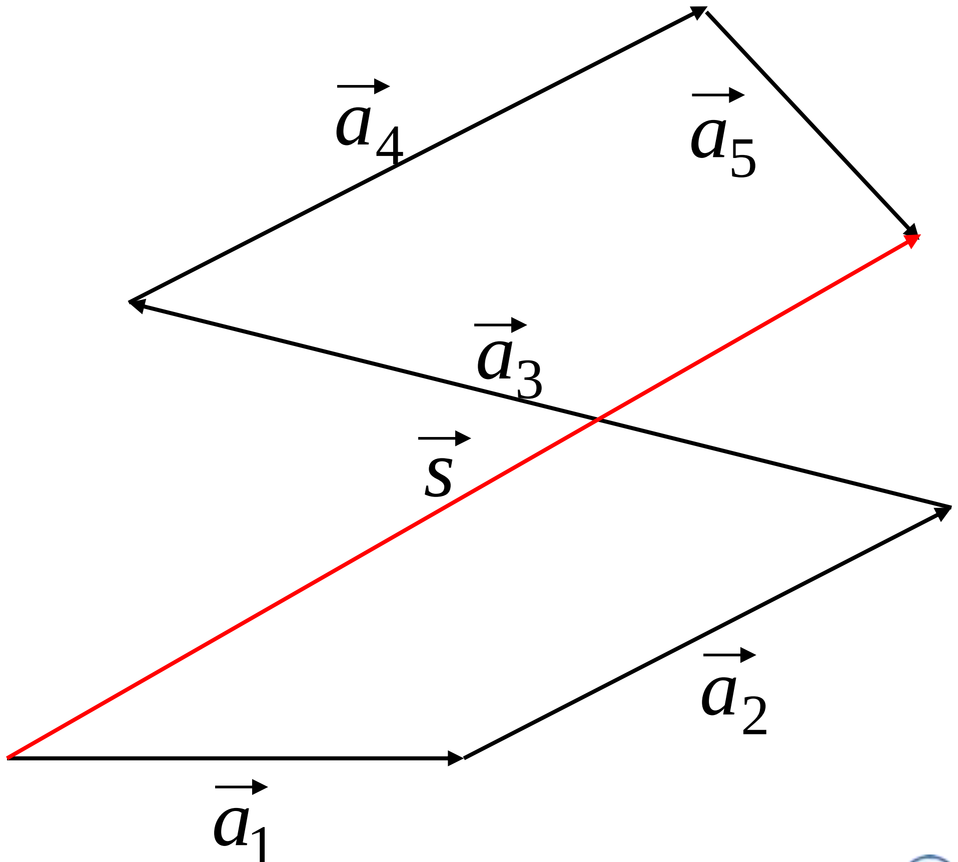




$$\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$$
$$=\vec{a}-\vec{b}$$

三角形法则可推广到多个向量相加 .

$$\vec{s}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$$



向量的数乘法

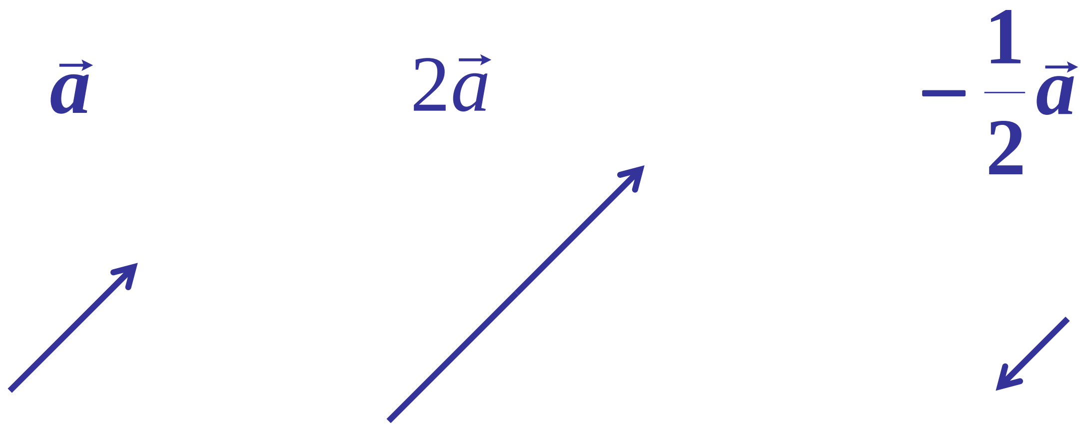
向量与数的乘法

设 λ 是一个数，向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的乘积规定为

(1) $\lambda > 0$, $\quad \lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$

(2) $\lambda = 0$, $\quad \lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$, $\quad \lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



注：设$\vec{a}^0$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，

按照向量与数的乘积的规定，

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0 \Longrightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}^0.$$

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

向量的加法及数与向量的乘法这两种运算称为向量的线性运算.

两个向量的平行关系：

定理 设向量$\vec{a} \neq 0$，那末向量$\vec{b}$平行于$\vec{a}$的充分必要条件是：存在唯一的实数λ，使$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

证 充分性显然；

必要性 设$\vec{b} \parallel \vec{a}$ 取 $|\lambda| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$,

当$\vec{b}$与$\vec{a}$同向时λ取正值，

当$\vec{b}$与$\vec{a}$反向时λ取负值， 即有$\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

$\because$ 此时$\vec{b}$与$\lambda\vec{a}$同向. 且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

λ的唯一性. 设 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，又设 $\vec{b}=\mu\vec{a}$，

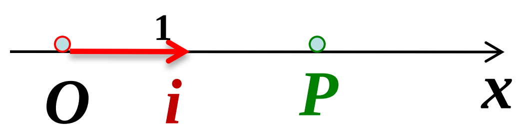
两式相减，得 $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$， 即 $|\lambda-\mu|\,|\vec{a}|=0$，

$\because |\vec{a}|\neq 0$， 故 $|\lambda-\mu|=0$， 即 $\lambda=\mu$.

说明：以上定理是建立数轴的理论依据。

① 给定一个点、一个方向及单位长度可以确定一条数轴；

② 给定一个点、一个单位向量可以确定一条数轴.



Ox轴上点P的坐标为x的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$$

点$P\leftrightarrow$向量$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}\leftrightarrow$实数$x$

向量线性运算举例

例1. 化简 $\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$

例2 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.

向量线性运算举例

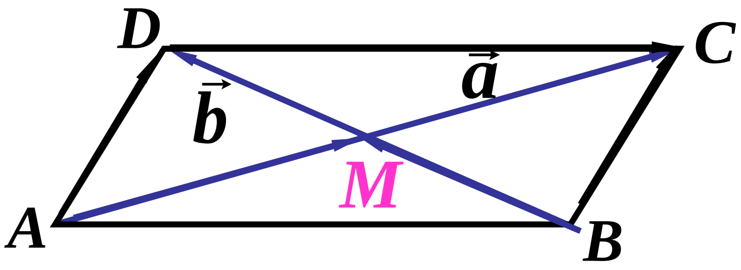
例1. 化简 $\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$

解. $\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$

$$=(1-3)\vec{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\vec{b}$$

$$=-2\vec{a}-\frac{5}{2}\vec{b}.$$

例2 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



证 $\because \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

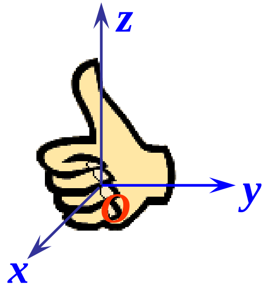
$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$

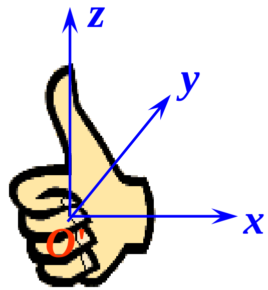
$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且相等，结论得证.

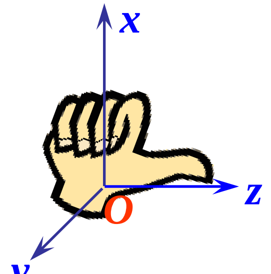
一、空间直角坐标系

三个坐标轴的正方向符合右手系.

即以右手握住z 轴，当右手的四个手指从正向x 轴以$\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向y 轴时，大拇指的指向就是z 轴的正向.







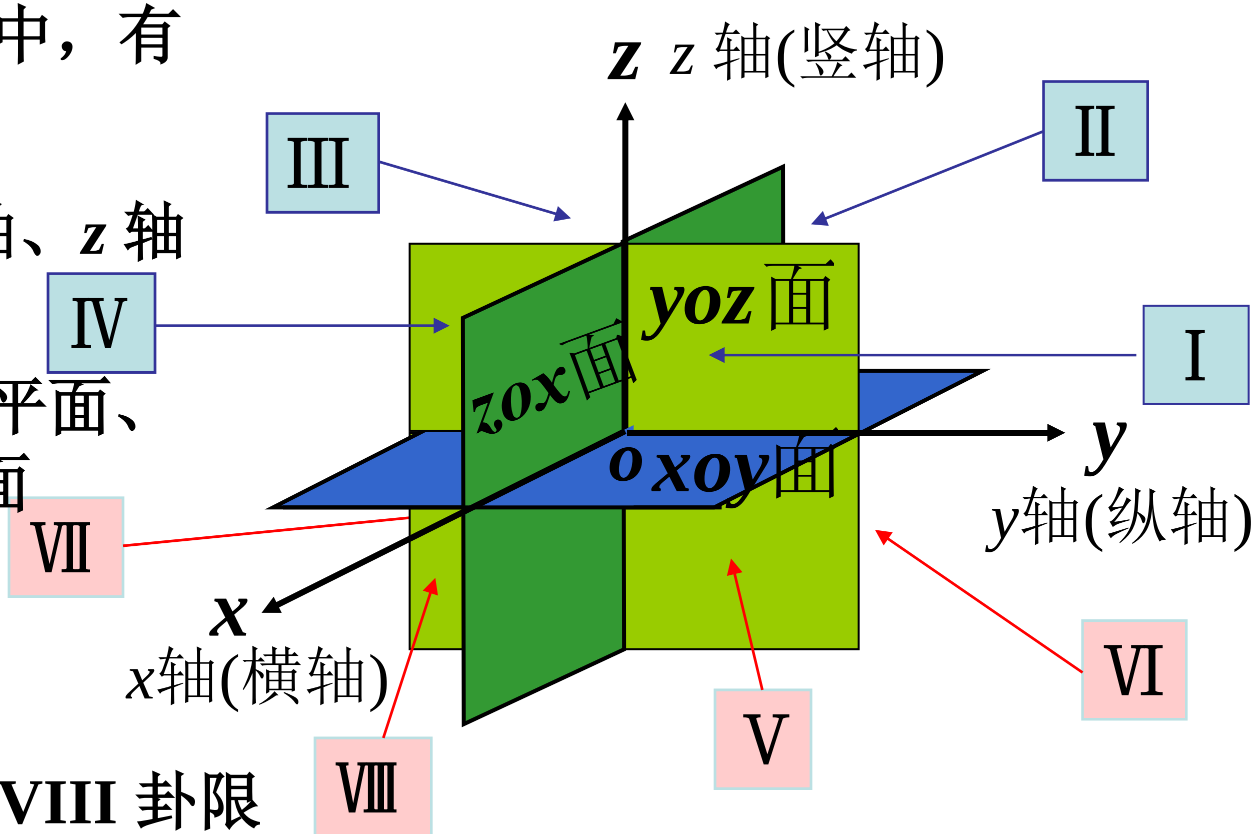
过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

在空间直角坐标系中，有

三条轴：x 轴、y 轴、z 轴

三个坐标面：xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面

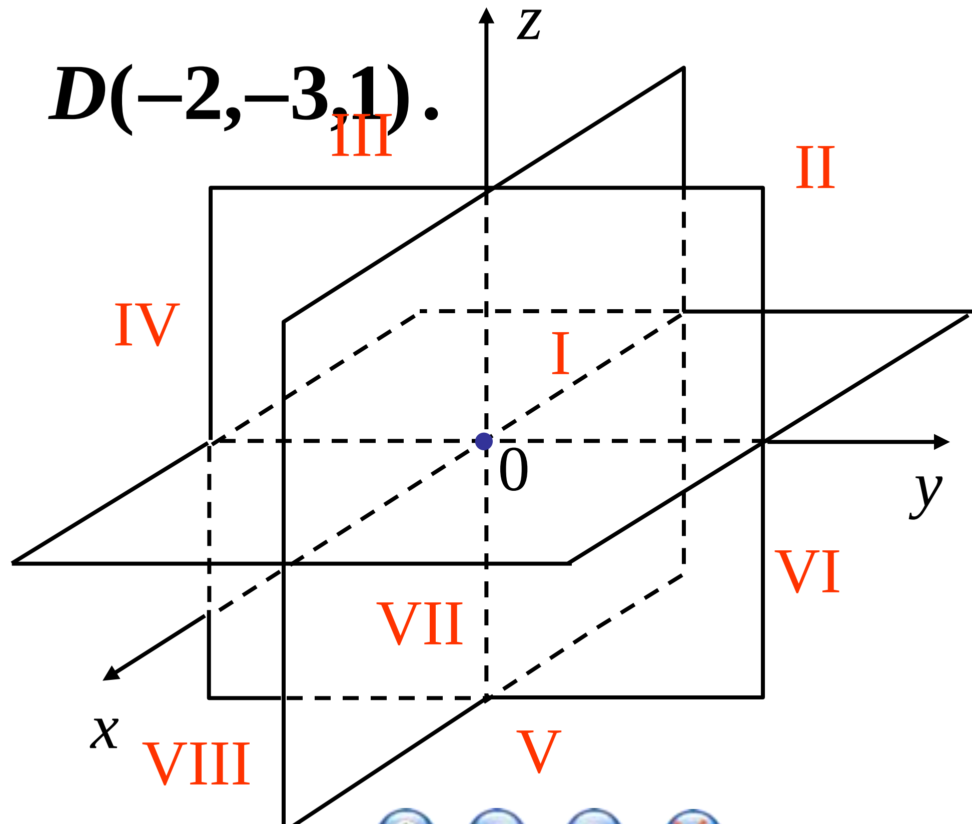
八个卦限：第 I — VIII 卦限



练习1 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$， $B(2,3,-4)$，

$C(2,-3,-4)$， $D(-2,-3,1)$.



解答： A:Ⅳ； B:Ⅴ；

C:Ⅷ； D:Ⅲ .

空间直角坐标系

在直角坐标系下

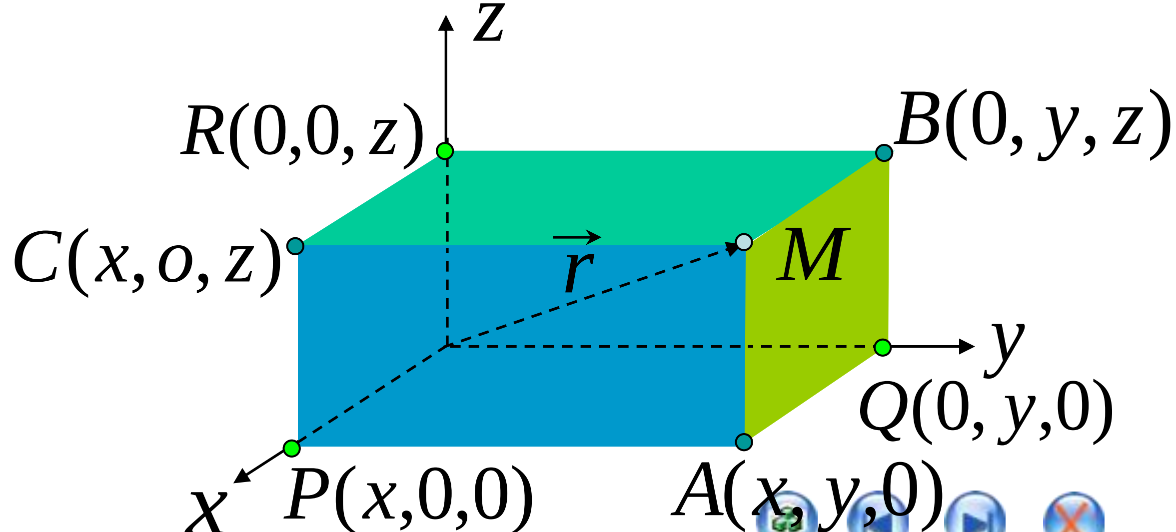
$$\textbf{点}\ M \xleftrightarrow{\ 1--1\ } \text{有序数组}(x, y, z) \xleftrightarrow{\ 1--1\ } \text{向径}\ \vec{r}$$

(称为点 M 的**坐标**)

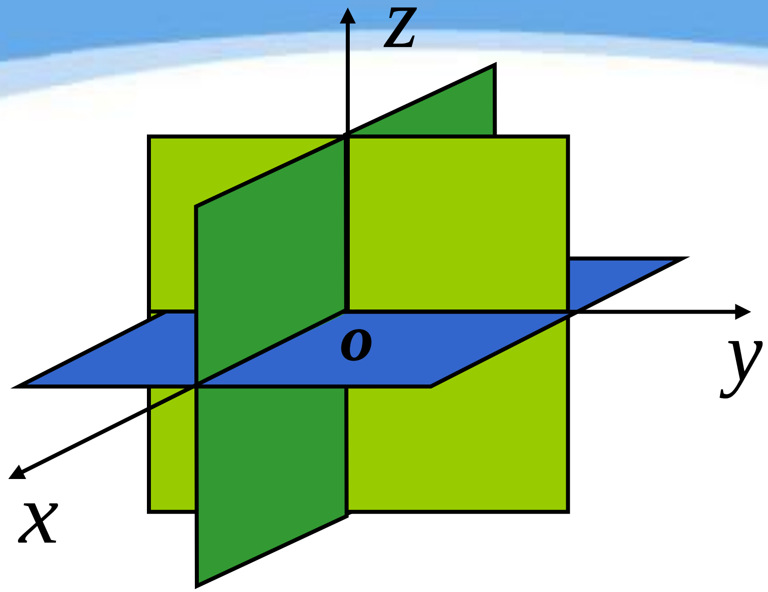
特殊点的坐标 ：

原点 $O(0,0,0)$；　坐标轴上的点 P, Q, R；

坐标面上的点 A, B, C



空间直角坐标系



坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

坐标面：

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x = 0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y = 0$$

二. 向量的坐标表示

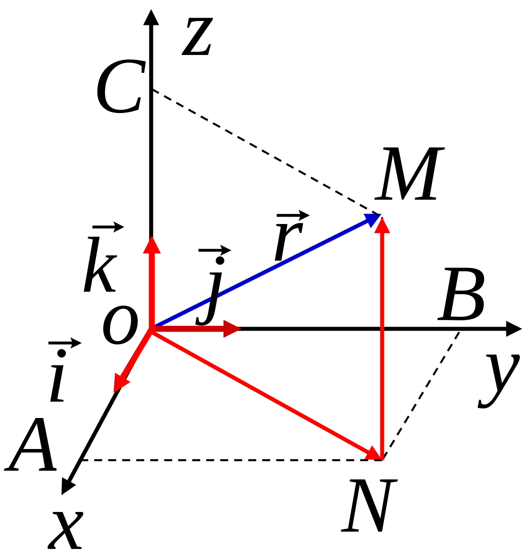
在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

向量的坐标表示与运算

说明:借助向量的坐标分解式,可用代数的方法讨论向量的运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}//\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

向量的坐标表示与运算

两向量平行的充要条件.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$,

则 $\boldsymbol{a} \,//\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{b}$ (λ为常数)

即$a_x=\lambda b_x$, $a_y=\lambda b_y$, $a_z=\lambda b_z$,

于是 $\boldsymbol{a} \,//\, \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$ (*)

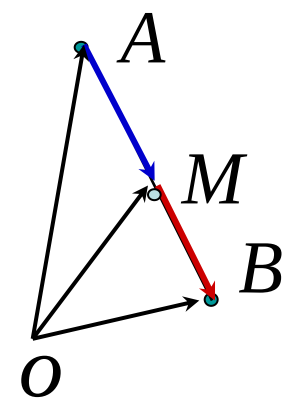
注: 在(*) 式中, 规定若某个分母为零相应的分子也为零.

例如: (4, 0, 6) // (2, 0, 3)

向量的坐标表示与运算

例3. 已知两点$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$及实数$\lambda \neq -1$，在$AB$直线上求一点$M$，使$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解: 设M的坐标为(x, y, z)，如图所示

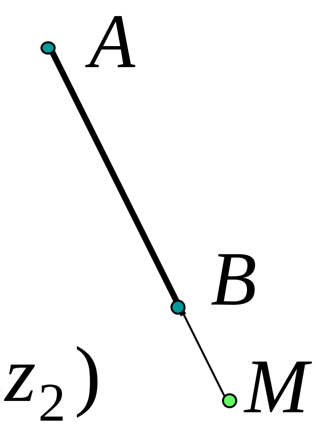


$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

向量的坐标表示与运算

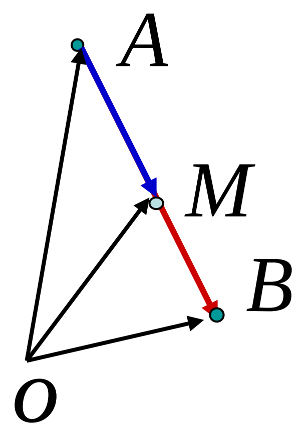
说明: 由

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

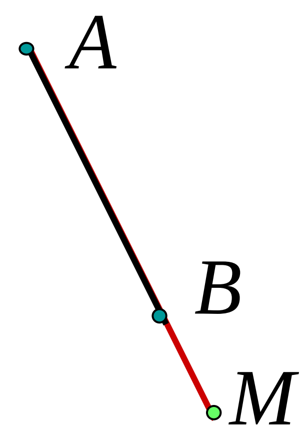
得定比分点公式:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$



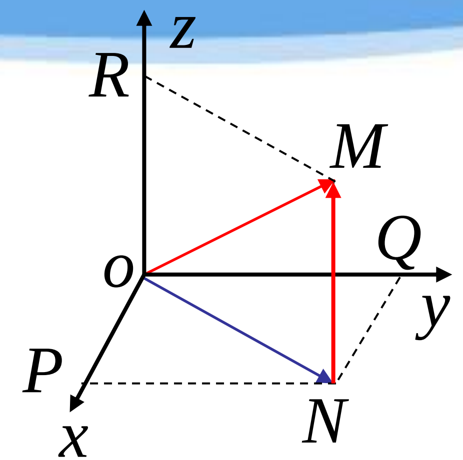
当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 为 AB 的中点 ,于是得



中点公式:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

三. 向量的模与两点间的距离公式

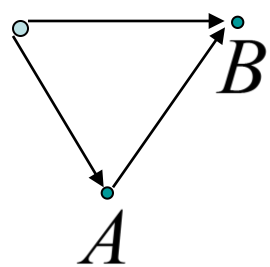


设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



对两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$, 因

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4

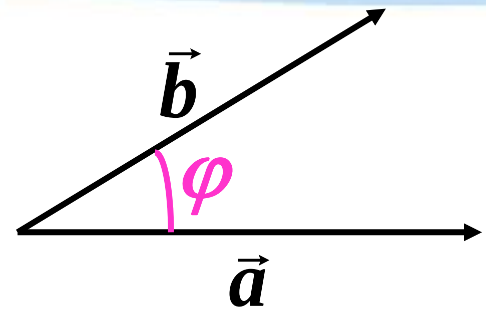
例4 求平行于向量$\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量的分解式.

解 所求向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个反向

$$\because |\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$$

$$\therefore \pm\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\pm\left(\frac{6}{11}\vec{i}+\frac{7}{11}\vec{j}-\frac{6}{11}\vec{k},\right)$$

空间两向量的夹角的概念：



$$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0},$$

向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角

$$\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{a}}) \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

类似地，可定义向量与一轴或空间两轴的夹角.

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

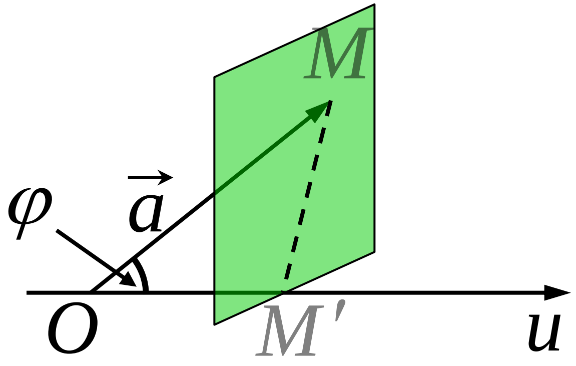
向量在轴上的投影

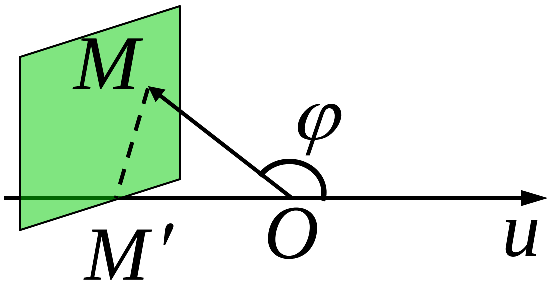
设 $\vec{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ，

则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\varphi$

记作 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$，即

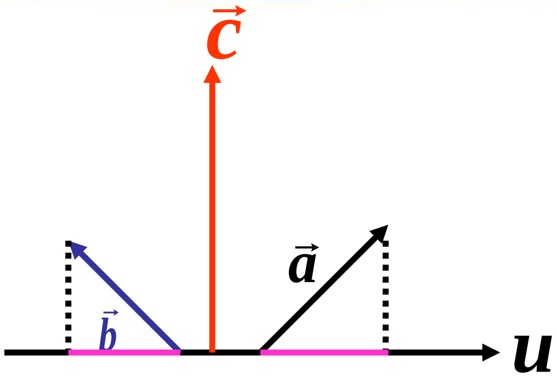
$$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$$





说明:

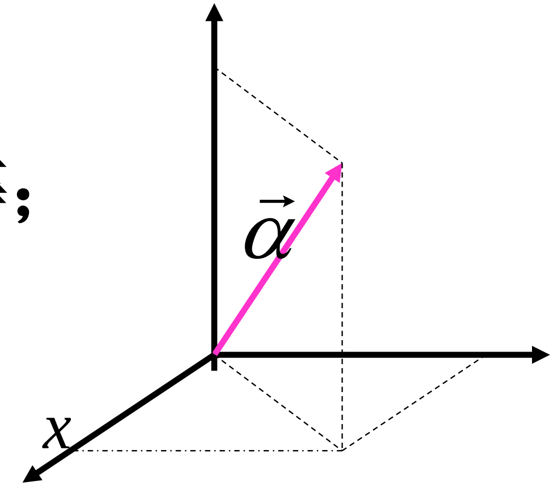
(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, 投影为正;



(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, 投影为负;

(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 投影为零;

(4) 相等向量在同一轴上投影相等;



例如, $\vec{a} = (x, y, z)$

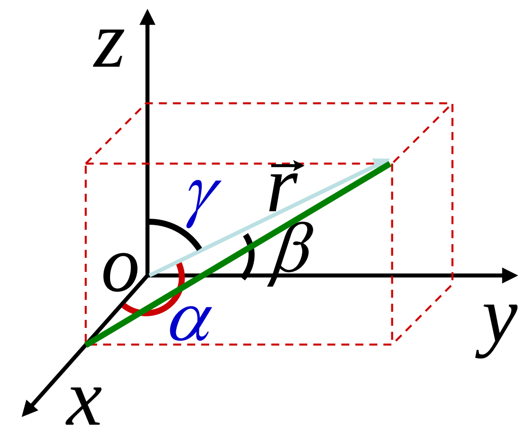
在坐标轴上的投影分别为

$$\Pr j_{ox}\vec{a} = x, \Pr j_{oy}\vec{a} = y, \Pr j_{oz}\vec{a} = z$$

向量的模、方向角、投影

给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴正向的夹角

α,β,γ 为其**方向角**.



方向角的余弦称为其**方向余弦.**

由向量在坐标轴上的投影的性质，

若 $\vec{r}=(x,y,z)$, 则

$$x=Prj_{ox}\vec{r}=|\vec{r}|\cos\alpha$$

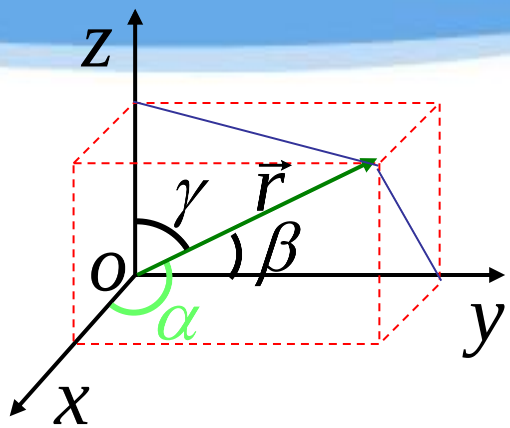
$$\Rightarrow \qquad \cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

向量的模、方向角、投影

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



方向余弦的性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量：

$$\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

例5

例5. 已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及同其方向的单位向量.

解: $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\vec{e}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

例6

例7. 设点 A 位于第一卦限,向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$,求点 A 的坐标 .

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限 , 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, 于是

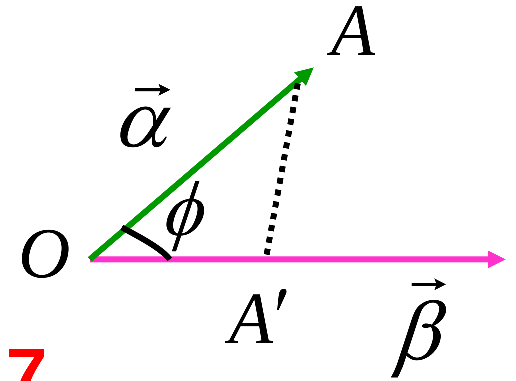
$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\,\vec{e}_{OA} = 6(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

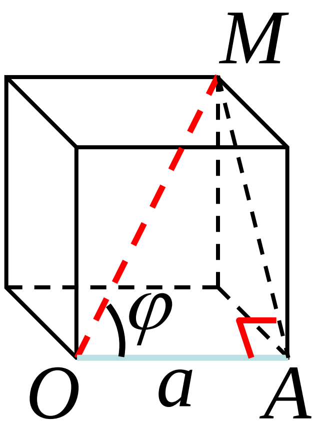
3. 向量 $\vec{\alpha}$ 在向量 $\vec{\beta}$ 上的投影为

$$\Pr j_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = OA' = |\vec{\alpha}|\cos\phi$$



例7.

例7. 设正方体的一条对角线为OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$，求$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影.



解: 如图所示，记 $\angle MOA=\varphi$，

$$\cos\varphi=\frac{|OA|}{|OM|}$$

$$|OM|^2=3|OA|^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

作业提示：

- 对求一个向量坐标表示，其基本要素是大小及方向，若已知向量的模及向量方向的几何刻画（见例题7），则只需求出向量的同方向的单位向量

$$\vec{r}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

即可求得该向量的坐标表示:

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \vec{r}^{\circ}$$

练习：

设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$,$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$,$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$

求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解: 因 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4\left(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}\right)+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$$

故在 x 轴上的投影为 $a_x=13$

在 y 轴上的分向量为 $a_y\vec{j}=7\vec{j}$