本课本次考试原则上按教学大纲执行。为了便于学生复习，在此将考试范围再明确一下。

１．　凡是教学进度安排中不要求讲的内容都不考

２．　函数的极限“语言”定义

３．　微分在近似计算中的应用

４．　涉及物理应用的

- 考试题型

基本计算，计算或证明　　共8个 大题

函数、极限、连续

考试要求

1.理解函数的概念，**掌握**函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2.了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3.理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4.**掌握**基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5.理解极限的概念，**理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.**

6.**掌握**极限的性质及四则运算法则.

7.掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8.理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9.理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10.了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

一元函数微分学

考试要求

1.理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，**会求平面曲线的切线方程和法线方程**，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，**理解函数的可导性与连续性之间的关系.**

2.**掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式.**了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，**会求函数的微分.**

3.了解高阶导数的概念，**会求简单函数的高阶导数.**

4.**会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.**

5.理解并**会用**罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理，了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.

6.**掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.**

7.理解函数的极值概念，**掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.**

8.**会用导数判断函数图形的单调性、凹凸性，**会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形.

9.了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径.

一元函数积分学

考试要求

1.理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念.

2.**掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法**.

3.会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

4.理解积分上限的函数，会求它的导数，**掌握牛顿-莱布尼茨公式.**

5.了解反常积分的概念，会计算反常积分.

6.**掌握**用定积分表达和计算一些几何量 (平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积等)及函数的平均值.

无穷级数

考试要求

1.理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.

2.掌握几何级数与 级数的收敛与发散的条件.

3.掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法.

4.掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6.了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7.理解幂级数收敛半径的概念、并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8.了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)，会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

9.了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

10.掌握几个常见函数的麦克劳林(Maclaurin)展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.

11.了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在$[-\pi,\pi]$上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在$[0,\pi]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

自测题（第 1 章）

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断，则有（　　）

(A) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定没有意义；

(B) $f(x_0-0)\neq f(x+0)$；(即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$)；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，则 $x\to x_0$ 时，$f(x)-f(x_0)$ 不是无穷小

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（　　）

(A) $a=1,b=1,$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=-1,b=-1$

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，则必有（　　）

(A) $f(x)$ 为 (a,b) 内的有界函数;

(B) $f(x)$ 在 (a,b) 内必有最大值和最小值;

(C) $f(x)$ 必取得介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值;

(D) 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) > 0$， $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) < 0$，则 $f(x)=0$ 至少有一根

4. 下列函数中，在给定趋势下是无界变量且为无穷大的函数是（　　）

(A) $y = x\sin\dfrac{1}{x}(x\to\infty)$;　(B) $y = n^{(-1)^n}(n\to\infty)$;

(C) $y=\ln x(x\to 0^+)$;　(D) $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}(x\to 0)$

5. $x=0$ 是函数 $f(x)=x^5\sin\dfrac{1}{x^5}$ 的（　　）

(A) 可去间断点;　(B) 跳跃间断点;　(C) 无穷间断点;　(D) 振荡间断点

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知$f(e^x-1)=x^2+1$，则$f(x)$的定义域为______

2. 设$f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$，要使$f(x)$在$x=0$处连续，应补充定义$f(0)=$______

3. 已知$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$______

4. 函数$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x(x-1)}$的可去间断点为$x_0=\underline{0}$，补充定义$f(x_0)=$______，则函数在$x_0$处连续.

5. 在$[a,b]$上连续的单调减少的函数$f(x)$，在点$x=\underline{a}$处取得最大值______；在$x=\underline{b}$处取得最小值______.

三．计算下列函数极限（每小题 5 分，共 25 分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$，求常数$a$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^{2}(1-\cos\sqrt{x})}{\ln(1+x)\sin^{2}x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \arctan \dfrac{1}{x}$

四. (5 分) 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性.

五. (7 分) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

六.（8 分）已知数列$a_1 = 2$，$a_2 = 2+\dfrac{1}{2}$，$a_3 = 2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$，……，极限存在，求此极限.

七.（8 分）设$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0 \\ \ln(1+x), & -1<x\le 0 \end{cases}$，求$f(x)$的间断点，并说明间断点的所属类型

八．（7 分）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$．

九. (10分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, x<0,\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, x>1\end{cases}$，试将 $f(x)$ 的定义域扩充到 $(-\infty,+\infty)$，并使 $f(x)$ 处处连续，且在 $(0,1)$ 内的图形是关于直线 $x=\dfrac{1}{3}$ 对称的抛物线.

所以，扩充定义域后的$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2e^x}{\sqrt{1+2x^2}}, x<0\\ 3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}, 0\le x\le 1\\ \dfrac{x^2+4x-5}{2x^2-x-1}, x>1\end{cases}$

自测题（第 2 章）

一. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $f'(x_0)=6$， $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-t\Delta x)}{\Delta x}=-18$，则 $t=$(　　　)

(A) $\dfrac{1}{3}$；　　(B) $-\dfrac{1}{3}$；　　(C) 3 ；　　(D) -3

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）

(A) 极限不存在；　　（B）极限存在但不连续

(C) 连续但不可导；　　(D) 可导

3. 设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，其中$f(x)$在$x=0$处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则$x=0$

是$F(x)$的（　　）

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点或间断点不能确定

4. 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f^{(n)}(x)$

是（　　）

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

5. 下列命题正确的是（　　）

(A) $f'(x_0)=[f(x_0)]'$；　　(B) $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$；

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

(D) $f'(x_0)=0$表示曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与x轴平行

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设曲线 $y = x^2 + x - 4$ 在点 M 的切线斜率为 3，则点 M 的坐标为 ______

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, x < 0 \\ a + x, x \geq 0 \end{cases}$，则当 $a =$ 　时，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

3. 若 $f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} x\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2+x}$，则 $f'(x) =$ ______

4. 设 $\tan y = x + y$，则 $\mathrm{d}y =$ ______

5. 过曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 上对应点 $t = 2$ 处的切线方程为 ______

三．（10 分）设 $f(x)=e^{\sin(2x-3)x}$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$

四．(10 分)已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$

五．（10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有意义，且 $f(0)=0$， $f'(0)=1$，又

$f(x_1+x_2)=f(x_1)\varphi(x_2)+f(x_2)\varphi(x_1)$，其中 $\varphi(x)=\cos x+x^2e^{-2x}$，求 $f'(x)$

六．（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

七.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\arctan 2x+2, x\le 0,\\ ax^3+bx^2+cx+d, 0<x<1,\\ 3-\ln x, x\ge 1\end{cases}$ 求使 $f(x)$ 在点 $x=0,1$ 处都可导的常数 a,b,c,d 并求 $f'(x)$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{ax^3+bx^2+2x-1}{x-1}=-\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}$$，由于

$$\lim_{x\to1^-}\frac{ax^3+bx^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax^3-ax^2-x^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\left(ax^2-(x-1)\right)=a$$，而

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$，故 $a=-1$，从而 $b=0$，因此 $f(x)=\begin{cases}\arctan 2x+2, x\le 0,\\ -x^3+2x+2, 0<x<1,\\ 3-\ln x, x\ge 1\end{cases}$，

它是可导函数，且 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+4x^2}, x\le 0,\\ -3x^2+2, 0<x<1.\\ -\dfrac{1}{x}, x\ge 1\end{cases}$

八．（10 分）设$\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$．

九．（10 分）设曲线$y = x^2 + ax + b$和$2y = -1 + xy^3$在点$(1,-1)$处相切，求常数a,b．

自测题(第 3 章)

一. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知点$(2,4)$是曲线$y=x^3+ax^2+bx+c$的拐点，且曲线在$x=3$处有极值，则$a=$ _

$b=$　　$c=$

2. 函数$f(x)=x+2\sqrt{x}$在$[0,4]$上的最大值为 _　最小值为 _

3. 函数$f(x)=\arctan x$在区间$[0,1]$满足 Lagrange 定理条件的点$\xi=$ ______

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^2 x}=$ ______；

5. 曲线$\begin{cases} x=t^2 \\ y=3t+t^3 \end{cases}$，$t\in[0,+\infty)$的拐点是 ______

二. 选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $f(x),F(x)$ 在 (a,b) 内可导, $F'(x)\neq 0,\forall x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2$,则至少存在一点 ξ，使（　　　）

(A) $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\xi\in(a,b)$; (B) $\dfrac{f(x_2)-f(a)}{F(x_2)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\xi\in(a,x_2)$;

(C) $\dfrac{f(b)-f(x_1)}{F(b)-F(x_1)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\xi\in(x_1,b)$; (D) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{F(x_2)-F(x_1)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\xi\in(x_1,x_2)$;

2. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　　　）.

(A) 有且仅有水平渐近线; (B) 有且仅有铅直渐近线;

(C) 既有水平渐近线也有铅直渐近线; (D) 既无水平渐近线也无铅直渐近线.

3. 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内（　　　）.

(A) $f'(x)<0,f''(x)<0$; (B) $f'(x)<0,f''(x)>0$;

(C) $f'(x)>0,f''(x)<0$; (D) $f'(x)>0,f''(x)>0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$x_0\neq 0, f(x_0)\neq 0$ 且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则（　　）.

(A) $(x_0,-f(x_0))$ 是曲线 $y=-f(x)$ 的拐点；　　(B) $f''(x_0)=0$；

(C) $(-x_0, f(-x_0))$ 不是曲线 $y=f(-x)$ 的拐点；

(D) $(-x_0,-f(x_0))$ 不是曲线 $y=-f(-x)$ 的拐点.

5. 设方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个实根，则 k 的取值范围为（　　）

(A) $\left(-\infty,\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right]$；　(B) $(-\infty,0]$；　(C) $\left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right\}\cup(-\infty,0)$；　(D) $\left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right\}\cup(-\infty,0]$

三、求极限（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\cdot\ln x$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

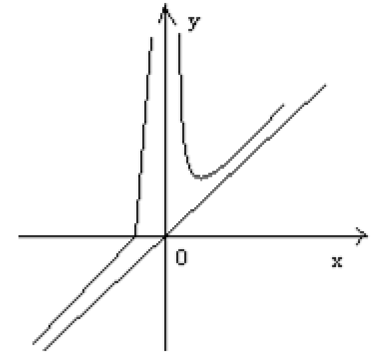
四.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，试证在 (a,b) 内分别存在 ξ,η 使得 $f'(\xi)=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(\eta)}{3\eta^2}$.

五．（10 分）求方程 $xe^{2x}-2x-\cos x+\frac{1}{2}x^2=0$ 在 $(0,1)$ 内的实根个数.

六.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 极值点.

七、（10 分）设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$，试求函数的增减区间及极值，函数曲线的

近线；并作出其性态图。



八. (10 分) 求曲线 $y=\ln x$ 上曲率 $k(x)$ 的最大值.

九. (10 分) 现做一个体积为 1 的开口容器，其上部为柱体，下底部为半球，且柱面单位面积造价是底部单位面积造价的 $\frac{3}{4}$，问底部半径与柱面高之间比例为多少时可使造价最低?

自测题(第 4 章)

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 下列结论**不正确**的是（　　）.

（A）一切初等函数在其定义区间上都有原函数　（B）凡奇函数的原函数都是偶函数

（C）若 $f(x)$ 的某个原函数为常数，则 $f(x)\equiv 0$　（D）$[\int f(x)dx]'=\int f'(x)dx$

2. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则下列各式中正确的是（　　）.

（A）$\int f(e^{2x})e^{2x}\mathrm{d}x=F(e^{2x})+C$　（B）$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=F(\sin x)+C$

（C）$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=F(\cos x)+C$　（D）$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=F(\frac{1}{x})+C$

3.若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x$，则 $\int xf(1-x^2)dx =$（　　）.

（A） $\arctan(1-x^2)+C$　　（B） $x\arctan(1-x^2)+C$

（C） $-\frac{1}{2}\arctan(1-x^2)+C$　　（D） $-\frac{x}{2}\arctan(1-x^2)+C$

4.设有函数 $\ln(ax)$ 与 $\ln(bx)$，且 $a \neq b$，则（　　）.

（A） $\ln(ax)$ 的原函数是 $\frac{1}{ax}$，$\ln(bx)$ 的原函数是 $\frac{1}{bx}$

（B） $\ln(ax)$ 与 $\ln(bx)$ 的原函数都是 $\frac{1}{x}$

（C） $\ln(ax)$ 与 $\ln(bx)$ 的原函数不相等

（D） $\ln(ax)$ 与 $\ln(bx)$ 的原函数相等，但不是 $\frac{1}{x}$

5. 记 $I=\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$，则 $I=$（　　）.

（A）$\ln(e^x+1)+C$　　（B）$x-2\ln(e^x+1)+C$

（C）$\ln(e^x-1)+C$　　（D）$2\ln(e^x+1)-x+C$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）：

1. $\int xf'(3x^2+1)\mathrm{d}x=$____________________.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且当 $x>0$ 时，有 $\int f(x^3)\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^{-x}+C$，则

$f(1)=$____________.

3. $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=$ ________________________.

4. $\int \frac{x(1+x^2)}{1+x^4}dx=$ ________________________.

5. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx=$ ________________________.

三、计算下列不定积分（每小题 6 分，共 48 分）：

1. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$；

2. $\int \frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

3. $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$;

4. $\int \frac{1}{\cos x(5+3\cos x)} dx$;

5. $\int \frac{2x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 1} \mathrm{d}x$;

6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$；

7. $\int (\sin x+\cos x)^n \cos 2x dx$；

8. $\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} \mathrm{d}x$.

四、（7 分）已知在过原点的曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$，求 $f(x)$.

五、（7 分）已知 $f'(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \sin x, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f(x)$．

六、(8 分)设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geq 0$ 时，$f(x)F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

自测题(第 5 章)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$，则 $f(7) =$ ____________.

2. 设 $f(x) = x^2 + e^{-x}\int_0^1 f(x)dx$,则$f(x) =$ ____________.

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^{\cos x} + x^2 \sin^3 x + 1}{1 + |x|} dx =$ ________________.

4. 曲线 $y = \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x} \cos t^2 dt$ 在点 $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0)$ 处的法线方程为 ____________________.

5. 在区间$[0,\pi]$上曲线$y=\cos x, y=\sin x$之间所围图形的面积为________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 设$f(x)$是连续函数，且$F(x)=\int_{x}^{e^{-x}} f(t)dt$，则$F'(x)=$（　　）.

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

2. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $I=\int_a^{a+T} f(x)dx$ 的值（　　）.

（A）依赖于 a,T　　（B）依赖于 a,T 和 x

（C）依赖于 T,x，不依赖于 a　　（D）依赖于 T，不依赖于 a

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ 的值为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）ln2　　（D）不存在

4. 曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x\ (0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为（　　）.

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{4}{3}\pi$　　（C）$\frac{2}{3}\pi^2$　　（D）$\frac{2}{3}\pi$

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则有（　　）.

（A） $N<P<M$　　　　（B） $M<P<N$

（C） $N<M<P$　　　　（D） $P<M<N$

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）：

1. 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(\cos t)dt}{x^3}$；

2. 计算 $\int_0^{\pi} xe^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x$；

3. 设$x \geq -1$,求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$；

4. 计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^{2}}\mathrm{d}x$；

5. 求曲线 $y=|\ln x|$, 直线 $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ 和 x 轴所围图形的面积.

四、已知 $f(x)$ 连续，试证 $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^{a}[f(x)+f(2a-x)]dx$ ，并由此计算 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

五、（8 分）已知 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^x tf(x-2t)dt$，求 $F''(0)$．

六、（8 分）设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^\pi f(x)dx$．

七、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx$．

八、（8 分）设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，且 $f''(x)\le 0$，试证明：

$$\int_a^b f(x)dx \le (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

九、(6 分) 证明：$2-\frac{\pi}{2} \le \int_{-1}^{1} \frac{x^2 + x\cos x}{1+\sin^2 x} dx \le \frac{2}{3}$.

自测题(第 6 章)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 若　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　.

解：$u_n = S_n - S_{n-1} = [\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}] - [\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}] = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+p}}$ 收敛，则常数 p 的最大取值范围是____________________.

3. $\int_0^1 x(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots)dx =$ ____________________.

4. 极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{n!}$ （p 为任意常数）的值等于______.

5. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数，且在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数为

$S(x)=$ ____________________.

二、选择题（每小题 3 分, 共 15 分）:

1. 下列命题中, 正确的是（　　）.

（A）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项有 $u_n < v_n(n=1,2\cdots)$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n < \sum_{n=1}^{\infty}v_n$

（B）若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1(n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

（C）若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

（D）若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0 < R < +\infty)$, 则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$.

2. 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$, $n=1,2,\cdots$, 则下列命题正确的是（　　）.

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ （　　）.

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛　　（C）发散　　（D）敛散性不确定

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 时发散，在 $x=0$ 处收敛，则常数 $a=$ （　　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）2

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x<1, \end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$， $x\in R$，

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{5}{2})=$ （　　）.

（A） $\frac{3}{4}$　　（B） $\frac{1}{2}$　　（C） $-\frac{3}{4}$　　（D） $-\frac{1}{2}$

三、判别下列级数的敛散性(每小题 6 分，共 18 分)：

1. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$；

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$；

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

四、解答下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=4$ 处发散，求该幂函数的收敛域.

2. 求幂函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$的收敛区间及和函数.

五、（10 分）设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x \cdot \cos x \mathrm{d}x$， $n = 1,2,\cdots$， 求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$.

六、（10 分）将函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\arctan t}{t}dt$ 展开成关于 x 的幂函数，并指出其收敛范围.

七、（10 分）将函数 $f(x)=\ln(2x^2+x-3)$ 展开成 $(x-3)$ 的幂函数.

八、（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂函数，并求级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

]

高等数学(上)综合自测题(一)

一、填空题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则$f^{(n)}(x)=$ ____________

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$ __

3. 心形线$r=a(1+\cos\theta)$的全长为 ___

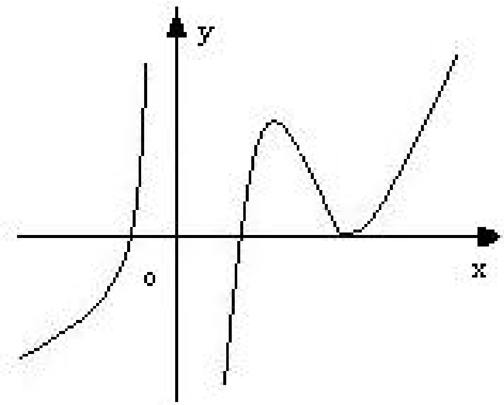
4. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为 _____

5. 已知$f(x)=x(x-a)^3$在$x=1$处取极值，则$a=$ __

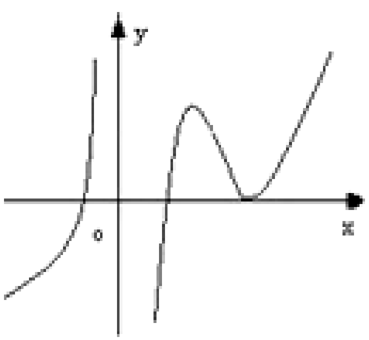
二、选择题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（ ）

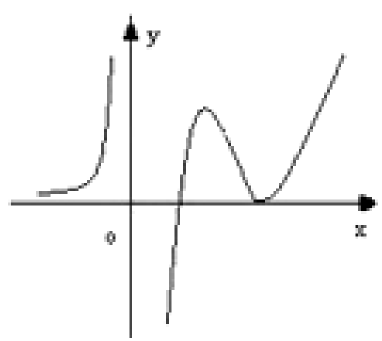
（A） 1 （B） 0 （C） e （D） -1



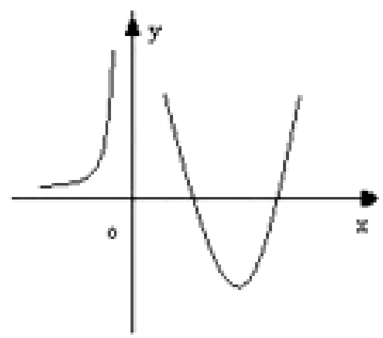
2. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为（ ）



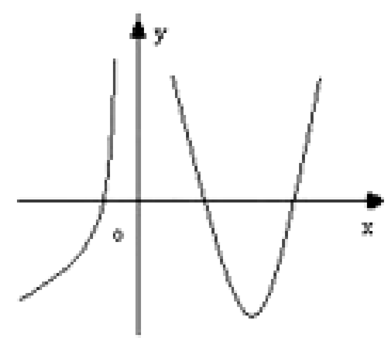
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_{x}^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 为（　　　）.

（A）$-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（B）$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

（C）$e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（D）$e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$（　　）

(A) $\dfrac{x^2}{2}$　　(B) $\dfrac{x^2}{2}+2$　　(C) $x-1$　　(D) $x+2$

5. 设 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，设 $S(x)$ 为 $f(x)$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上 Fourier 级数展开式的和函数，则 $S(x)=$（　　　）

(A) $S(x)=f(x)$　　(B) $S(x)=\begin{cases}0, & x=(2k+1)\pi \\ x, & x\neq(2k+1)\pi\end{cases}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(C) $S(x)=x$　　(D) $S(x)=\begin{cases}0, & x=(2k+1)\pi \\ f(x), & x\neq(2k+1)\pi\end{cases}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

三. (10 分) 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(1)=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x})\right]$.

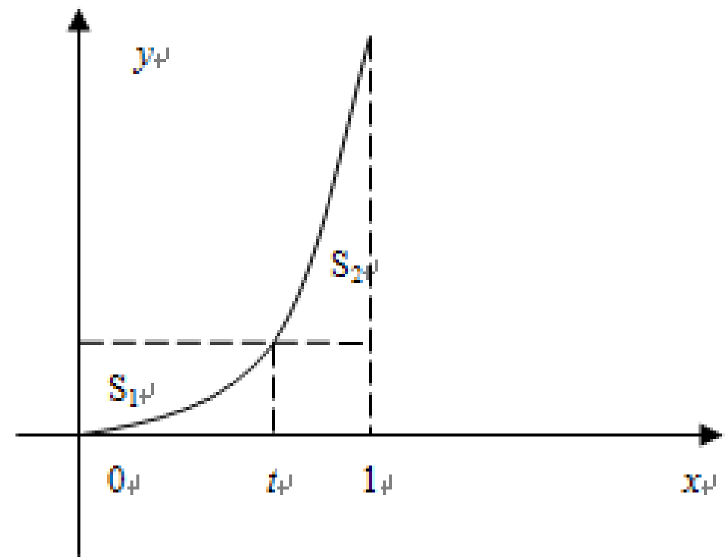
四、（16分，每小题8分）求解下列各题

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 设$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^{y} + y + 1 = 0 \end{cases}$确定$y = y(x)$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$

五．（16分，每小题8分）求解下列各题：

1. 在闭区间[0,1]上给定函数 $y = x^2$，点 t 在什么位置时，



面积 S_1 和 S_2 之和分别具有最大值和最小值？

2、$\int_0^{N\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

六. (10 分) 设 $f(x)=x^3\sin x$，求 $f^{(10)}(0)$.

七、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

八、(8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,\mathrm{d}x$，试证在 $[0,1]$ 内至少有一点 θ，使 $f'(\theta)=-\dfrac{f(\theta)}{\theta}$.

高等数学(上)综合自测题(二)

一、填空题（每小 3 分，共 15 分）

1. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，则 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$ ________

2. 设 $f(x)=(1+\cos x)^{x+1}\sin(x^2-3x)$，则 $f'(0)=$

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且当 $x>0$ 时，有 $\int f(x^3)\,\mathrm{d}x=(x-1)e^{-x}+C$，则 $f(1)=$ ____

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+\pi, -\pi\le x<0\\ 0, x=0\\ 1, 0<x\le\pi\end{cases}$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在

$[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $S(x)=$

____

5. 设函数 $F(x)$ 是 $\dfrac{\ln x}{x}$ 的一个原函数，则 $dF(e^{\frac{x}{2}}) =$ ______

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$， $x=0$ 为无穷间断点， $x=1$ 为可去间断点，则 $a=$ （　　）.

（A） 1;　　（B） 0;　　（C） e ;　　（D） e^{-1}

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=1$，则在点 $x=0$ 处

$f(x)$ （　　）

（A） 不可导　　（B） 可导，且 $f'(0)\neq 0$　　（C） 取得极大值　　（D） 取得极小值

3. 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)<0$ 内，则在 $(0,+\infty)$（　　）

（A）$f'(x)>0,f''(x)<0$　　（B）$f'(x)>0,f''(x)>0$

（C）$f'(x)<0,f''(x)<0$　　（D）$f'(x)<0,f''(x)>0$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)<0$. 记

$S_1=\int_a^b f(x)dx$　　$S_2=f(b)(b-a)$，　$S_3=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则有（　　）.

（A）$S_1<S_2<S_3$　（B）$S_2<S_3<S_1$　（C）$S_3<S_1<S_2$　（D）$S_1<S_3<S_2$

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\dfrac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径为（　　）

（A）5　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{1}{5}$

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）：

1. 求曲线$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \dfrac{\pi}{2} - \arctan t \end{cases}$的与直线$x + 2y = 0$平行的切线方程.

2. 求曲线$y = \ln(1 - x^2)$ $(0 \le x \le \dfrac{1}{2})$的弧长.

3. 设 $f(x)$ 具有二阶导数， $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\left[f(x+\frac{2}{t})-f(x)\right]\sin\frac{x}{t}$. 求 $\mathrm{d}F(x)$

4. $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，计算 $\int_{-2}^{10}(x-[x])\,\mathrm{d}x$.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

四. （ 8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，试证在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

五（8 分）试确定常数 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}3e^{2x}-bx, & x<0,\\ \sqrt{a+x}+\sin 5x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

六（8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内存在 ξ,η 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\eta^2}{ab}f'(\eta)$．

七（8 分）设曲线$\begin{cases} x = at^3 \\ y = t^2 - bt \end{cases}$ $(a > 0, b > 0)$在$t = 1$时切线斜率为$\dfrac{1}{3}$，问a, b为何值时，曲线与x轴所围部分面积最大？

八、（8 分）设$a_n = \int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right| \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots)$，试求级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$的和.