V、课程同步练习

第 4 章　无穷级数

4.1　常数项级数与正项级数　　同步练习

一、填空题

1. 解：充分必要条件.

2. 解：由 p 级数的敛散性知，仅当 $2+p>1$ 即 $p>-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+p}}$ 收敛，其他情形均发散.

3.解：　由比值判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$ 收敛，所以原极限 $=0$.

二、选择题：

1. 选（A）.

2.选（D）.

3.C

三、根据级数收敛和发散的定义判定下列级数的敛散性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n});$$

解　因为

$$s_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})\to\infty(n\to\infty),$$

所以级数发散.

$$(2)\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots;$$

解　因为

$$s_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$
$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

所以级数收敛.

$$(3)\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots.$$

解 $s_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{6}+\cdots\sin\frac{n\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots+(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi)]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi).$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 不存在，所以 $\lim_{n\to\infty}s_n$ 不存在，因而该级数发散.

四、判别下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{na}{n+1})^n \quad (a>0)$；3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

解：1. 由比值法判别法可得原级数收敛.

2. 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{na}{n+1})^n}=a$，当 $a>1$ 时原级数发散；当 $0<a<1$ 时原级数收敛；

当 $a=1$ 时，$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{e}\neq 0$，则原级数发散.

3. 利用根值判别法，因为 $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}}$，

而由 $1\le\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}}\le\sqrt[n]{2}$ 及 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ 知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}}=1$，

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$，因此原级数收敛.

4.2 交错级数与任意项级数　　同步练习

一、填空题：

1. 答案：因为 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{n-1}[\sqrt{n}-(-1)^n]=\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}$，

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，所以原级数发散.

2. $p\le 1$，$p>1$

3. 条件收敛

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n\pi+t)}{n\pi+t}\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t$ 是交错级数。由于数列 $\left\{\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t\right\}$ 单调减少收敛于零，所以是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的。

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t\right|$，由于 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{n\pi+t}\mathrm{d}t\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 是发散的，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛的。

二、选择题：

1 选（B）.对于（B）：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\dfrac{1}{3}\ne 0$ 而发散；（A）为条件收敛；（C）（D）为绝对收敛.

2.选（C）.

3. 选择（B）. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，由收敛级数的性质知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

三、判别下列级数的敛散性．如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$（常数 $a>0$）；　　2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$；

解：1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$（常数 $a>0$）；

由 $\left|(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})\right|=1-\cos\dfrac{a}{n}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{a}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{a}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\frac{a}{2n})^2}{\frac{1}{n^2}}=\frac{a^2}{2}\ne 0,$$

由正项级数的比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{a}{n})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 同时敛散.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{a}{n})$ 收敛，从而原级数绝对收敛.

解：2. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$；

记$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$，则$|u_n|\geq\frac{1}{n+1}\overset{\Delta}{=}v_n$.

显见$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$去掉首项后所得级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$仍是发散的，由比较法知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，从而$\sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散. 又显见$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$是 Leibniz 型级数，它收敛. 即$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$收敛，从而原级数条件收敛.

四、讨论级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$的绝对收敛和条件收敛性.

解：因为$\left|\frac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}\right|=\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}\sim\frac{1}{n^{2x}}$， $(n\to\infty)$，

当$2x>1$即$x>\frac{1}{2}$时，原级数绝对收敛；

当$x\leq 0$时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}\neq 0$，故原级数发散；

当 $0<x\leq\frac{1}{2}$ 时， $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}$ 发 散， 即 原 级 数 不 绝 对 收 敛， 而 $v_n=\frac{1}{(n-1)^x(n-2)^x}$，$v_{n+1}=\frac{1}{n^x(n-1)^x}$，可见$v_n\geq v_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty}v_n=0$，由 Leibniz 判别法知原级数收敛，故当$0<x\leq\frac{1}{2}$时，原级数条件收敛.

4.3 幂级数　　同步练习

一、填空题：

1. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|=1$，所以 $R=1$.

又当 $x=\pm1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$，都收敛，故级数的收敛域为 $[-1,1]$.

2. 解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$，所以，$-1<x-4<1$，$3<x<5$.

当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\dfrac{1}{n})$，由调和级数知发散；

当 $x=5$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，由交错级数的 Leibniz 判别法知此级数是收敛的. 所以收敛域为 $(-3,5]$.

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛. 则此级数在 $x=2$ 处________.（绝对收敛、条件收敛、发散）

解：绝对收敛

二、选择题：

1.设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，下列结论中正确的是(　　).

（A）若函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上，则区间 I 为此级数的收敛区间

（B）若 $S(x)$ 为此级数的和函数，则余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$

（C）若 $x_0\in I$ 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则 $|x|<|x_0|$ 所有 x 都使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛

（D）若 $S(x)$ 为此级数的和函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 必收敛于 $S(x_0)$

解：选（B）.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(0<R<+\infty)$，则（　　）是正确的.

(A) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛　　(B) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 发散

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，则是条件收敛

(D) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 可能收敛也可能发散

解：选（D）.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 时发散，在 $x=0$ 处收敛，则常数 $a=$（　　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）2

解：由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-a)^n}{n}$ 收敛，由此知 $|a|\le1$. 当 $\boldsymbol{-1\le a\le1}$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1，因此该幂级数在区间 $(a-1,a+1)$ 内收敛，特别地，在 $(0,a+1)$ 内收敛，此与幂级数在 $x>0$ 时发散矛盾，

因此 $a=-1$. 故选（B）.

三、解答下列各题

1. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛，在 $x=4$ 处发散，求该幂函数的收敛域.

解：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，由 Able 定理知，该幂级数在 $|x-2|<2$ 内绝对收敛，又在 $x=4$ 处发散，因此再由 Able 定理知，该幂级数在 $|x-2|>2$ 内发散. 所以原幂级数的收敛域为 $[0,4)$.

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

收敛域 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 内设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x^{2n+1}\right)'}{2^{n+1}}=\left(\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n\right)'=\left(\frac{x}{2}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=\left(\frac{x^3}{2(2-x^2)}\right)'=\frac{6x^2-x^4}{2(2-x^2)^2},$$

令 $x=1$，$S(1)=\frac{5}{2}$，所以，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}=S(1)=\frac{5}{2}$.

4.4　函数展开成幂级数　　同步练习

一、填空题：

1.函数 $f(x)=e^{x-1}$ 的 Maclaurin 级数为 $e^{x-1}=$______________________________.

解：$e^{x}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$， $x\in(-\infty,+\infty)$.

$$e^{x-1}=\frac{1}{e}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right),\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

2.函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x_0=0$ 处的幂级数为 $\dfrac{1}{1+x}=$______________________.

解：$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$， $x\in(-1,1)$.

3.函数 $f(x)=\arctan x$ 展成 x 的幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ （$x\in[-1,1]$），则 $a_n=$______________________.

解：$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ $x\in[-1,1]$.

所以，$a_n=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{1}{2k+1},n=2k+1\\ \quad 0\quad,\ n=2k\end{cases},k=0,1,2,\cdots\cdots$

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开的 Maclaurin 级数为（　　　　）

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$　　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{2^n}^n$　　(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{2^{n+1}}^n$　　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x}{2^n}^n$

解：选 C

$$f(x)=\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right)$$

2. $f(x)=\sin 2x$ 展开成 Maclaurn 级数为（　　　）

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$　　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$

解：选（A） $\sin 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3.. 函数 $f(x)=\ln(2x^2+x-3)$ 展开成 $(x-3)$ 的幂函数为（　　　）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{1}{2})^n(x-3)^n$　　　　(B) $\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{2}{9})^n(x-3)^n$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(\frac{2}{9})^n+(\frac{1}{2})^n\right](x-3)^n$　　　　(D) $\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(\frac{2}{9})^n+(\frac{1}{2})^n\right](x-3)^n$

解：选（D）

$$f(x)=\ln[(2x+3)(x-1)]=\ln[9(1+\frac{2}{9}(x-3))]+\ln[2(1+\frac{x-3}{2})]$$

$$=\ln 18+\ln[1+\frac{2}{9}(x-3)]+\ln(1+\frac{x-3}{2})$$

$$=\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}[\frac{2}{9}(x-3)]^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{x-3}{2})^n$$

$$=\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(\frac{2}{9})^n+(\frac{1}{2})^n\right](x-3)^n.$$

三、将 $f(x)=\frac{x}{2-x-x^2}$ 在 $x_0=0$ 处展开成幂级数，并求其收敛域.

解： $f(x)=\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(1-x)(2+x)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$，

因为 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$， $-1<x<1$；

$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$， $-1<\frac{x}{2}<1$，即 $-2<x<2$；

根据幂级数运算性质有

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-\frac{(-1)^n}{2^n}]x^n,$$

所以， $\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-\frac{(-1)^n}{2^n}]x^n$， $-1<x<1$.

四、将 $f(x)=\cos x$ 展开成 $x+\frac{\pi}{3}$ 的幂级数.

解： 因为 $f(x)=\cos[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad(-\infty<x<+\infty).$$

所以， $\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!},(-\infty<x<+\infty)$.

4.5 Fourier 级数　　同步练习

一、填空题：

1. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数, 且在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数为 $S(x)=$

________________________.

解：由 Dirichlet 收敛定理可得，$S(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0<x<\pi,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\\ \dfrac{\pi}{4} & x=\pm\pi.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$， $x\in R$，

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx\quad (n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\dfrac{5}{2})=$____________.

解：将 $f(x)$ 作偶延拓得余弦级数，其周期为 2，因此由 Dirichlet 收敛定理有

$S(-\dfrac{5}{2})=S(2-\dfrac{5}{2})=S(-\dfrac{1}{2})=S(\dfrac{1}{2})$，

且 $S(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}[f(\dfrac{1}{2}+0)+f(\dfrac{1}{2}-0)]=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$.

即 $S(-\dfrac{5}{2})=\dfrac{3}{4}$.

3. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}(-\pi\le x\le\pi)$ 的 Fourier 级数为______________

解：由于函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，因此 $a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin n\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}\right]=-\frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}}=(-1)^{n-1}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}(n=1,2,\cdots)$$

二、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的 Fourier 级数应为（　　　　）的形式

（A） $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$　　　（B） $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx\right)$

（C） $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$　　　（D） $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

解：选 B

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0, \\ 1, & 0\le x\le\pi,\end{cases}$ 的 Fourier 级数和函数为 $S(x)=$（　　　　）

（A） $S(x)=f(x)\left(-\pi\le x\le\pi\right)$　　　（B） $S(x)=\begin{cases} f(x), x\in\left(-\pi,0\right)\cup(0,\pi) \\ 0,\ x=-\pi,0,\pi\end{cases}$

（C） $S(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在一个周期上 $(-\pi,\pi]$ 上 $S(x)=f(x)$

（D） $S(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在一个周期上 $(-\pi,\pi]$ 上

$$S(x)=\begin{cases} f(x), x\in\left(-\pi,0\right)\cup(0,\pi) \\ 0,\ x=-\pi,0,\pi\end{cases}$$

解：选 D

3. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续是其 Fourier 级数的和函数 $S(x)$ 满足（　　　）的充分条件

（A） $S(x)=f(x)\left(-\pi\le x\le\pi\right)$　　　（B） $S(x)=f(x)\left(-\pi<x\le\pi\right)$

（C） $S(x)=f(x)\left(-\pi\le x<\pi\right)$　　　（D） $S(x)=f(x)\left(-\pi<x<\pi\right)$

解：选 D

（题目三、四 被误放到下一节了，注意提到 4.5 节）

三、判断题

1.三角函数的正交性是指在三角函数系中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分值为 0.（　　）

解：不对.

2.在 $[-\pi,\pi]$ 上连续的函数 $f(x)$ 之 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.（　　）

解：不对.

3. $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 Dirichlet 条件，且在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(-x)=-f(x)$ ，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=0,\pi,-\pi$ 上必收敛于 0.（　　）

解：对.

四、将下面周期为 2π 的函数展开成 Fourier 级数：

1. $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x\le\pi, \\ 0, & x=0, \\ \pi+x, & -\pi\le x<0;\end{cases}$ 并计算 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$.

解： $x=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续，其 Fourier 级数收敛于 $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\pi$ ，

当 $x \neq 2k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，其 Fourier 级数收敛于 $f(x)$．且其 Fourier 系数如下：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}[-\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}+\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{0}=\begin{cases}\dfrac{4}{n^2\pi}, & n\text{为奇数},\\ 0, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=0,$$

所以，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=\begin{cases}\pi-x,0<x\leq\pi\\ \pi,x=0\\ \pi+x,-\pi\leq x<0\end{cases}}$．

当 $x=0$ 时，有 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\pi}$，由此可推得 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$．

4.6　函数展开成正弦级数与余弦级数　同步练习

一、填空题：

1. 若 $f(x+2\pi)=f(x)$，设 $f(x)=1-\dfrac{x}{\pi}(0\le x\le\pi)$ 的余弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-3)=$________，$S(12)=$________.

解：将 $f(x)$ 作偶延拓，即 $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\pi}, & 0\le x\le\pi,\\ 1+\dfrac{x}{\pi}, & -\pi\le x<0.\end{cases}$

从而，由 $-3\in(-\pi,0)$ 得 $S(-3)=f(-3)=1-\dfrac{3}{\pi}=\dfrac{\pi-3}{\pi}$.

由周期性知，$S(12)=S(12-4\pi)$，而 $12-4\pi\in(-\pi,0)$，

所以 $S(12)=S(12-4\pi)=f(12-4\pi)=1+\dfrac{12-4\pi}{\pi}=\dfrac{12-3\pi}{\pi}$.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$ 展开成余弦级数为________

解：将 $f(x)$ 作周期为 2π 的偶延拓，则 $0\le x<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时 $f(x)$ 连续，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 为间断点，此时 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 $\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$. 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},(n=1,2,\cdots).$$

所以，$f(x)=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{2}{3\pi}\cos 3x+\frac{2}{5\pi}\cos 5x-\cdots$

$$(0\le x<\pi,且x\ne\frac{\pi}{2})$$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开为正弦级数为________

解：将 $f(x)$ 作周期为 2π 的奇延拓，则满足收敛定理的条件. $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，则其 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛于 $\dfrac{\frac{\pi}{2}+(-\frac{\pi}{2})}{2}=0$，在连续点处收敛于 $f(x)$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}.$$

所以，$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots,(0<x\le\pi)$.

二、求 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 的周期为 4 的余弦级数的系数 a_3.

解：因为 $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad(n=0,1,2,\cdots)$，而 $l=2$，

所以 $a_3=\dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^{2}(x-1)\cos\frac{3\pi x}{2}dx=-\frac{8}{9\pi^2}$.