高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.3 导数的应用

2.3.1 函数的单调增减性的判定
2.3.2 函数的极值及其求法
2.3.3 最大值及最小值的求法

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.3 导数的应用

导数的应用

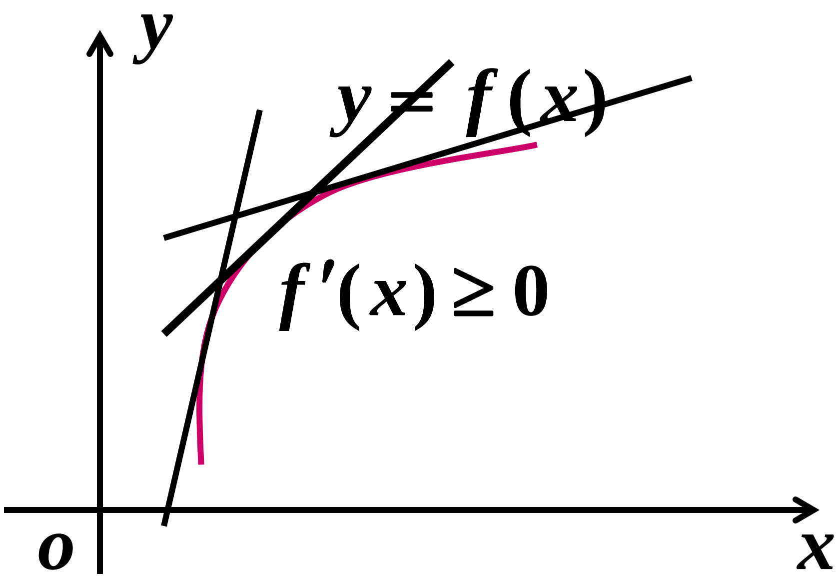
- 2.3.1 函数的单调增减性的判定
  - 函数的单调性判别法
  - 函数的单调性习例1-6
- 2.3.2 函数的极值及其求法
  - 函数的极值判别法
  - 函数的极值习例7-11
- 2.3.3 函数的最值及其求法
  - 函数的最值判别法
  - 函数的最值习例12-14
- 课堂思考与练习

一.函数单调性的判别法

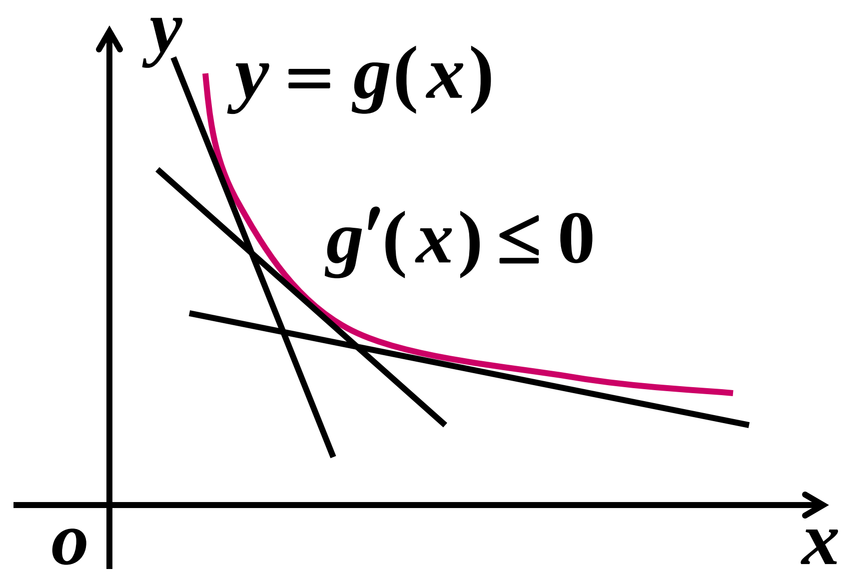
1. 定义: $\forall x_1, x_2 \in I$,

当 $x_1 < x_2$时,若 $f(x_1) \le f(x_2)$,则 $f(x)$在 I上单增;

当 $x_1 < x_2$时,若 $f(x_1) \ge f(x_2)$,则 $f(x)$在 I上单减.



具有正斜率的切线



具有负斜率的切线

2. 判别法

定理1. 设 $f(x)$ 在区间 I上可导.

(1) 若对于一切 $x \in I$, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$在 I上单增;

(2) 若对于一切 $x \in I$, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I上单减.

证明: $\forall x_1 < x_2 \in I$. 在$[x_1, x_2]$上用Lagrange中值定理得,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

又 $x_2 - x_1 > 0$.

(1) 若 $f'(x) > 0 \to f'(\xi) > 0$, 则 $f(x_2) > f(x_1)$.

$\therefore f(x)$在 I上单增;

(2) 若 $f'(x) < 0 \to f'(\xi) < 0$, 则 $f(x_2) < f(x_1)$.

$\therefore f(x)$在 I上单减.

注意:

(1) 该判别法为充分条件判别法.

(2) 函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

(3) 判别法中的区间可以是开区间、闭区间和无穷区间.

(4) $y=f(x)$ 连续可导的条件不可少，有导数不存在的点时，函数的单调性须重新考虑.

(5) 对于连续函数，用导数为0的点和导数不存在的点来划分定义区间，就可得出各部分区间上函数的单调性.

(6) 利用判别法可以判定函数的增减性、求单调区间，还可证明不等式、讨论根的存在性.

函数的单调性习例

例1. 设 $f(x)=xe^{-x^2}$，判定其单调性并求单调区间.

例2. 确定 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

例3. 当 $x\ge 0$ 时，证明 $\ln(1+x)\ge \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

例4. 证明 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le \dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

例5. 设 $f(x)$ 在 $0\le x\le a$ 上二次可微，且 $f(0)=0$，$f''(x)>0$，

证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 内单增.

例6. 方程 $\ln x = ax\ \ (a>0)$ 有几个实根.

例1.设 $f(x)=xe^{-x^2}$，判定其单调性并求单调区间.

解: $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2),$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 列表讨论如下:

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$\therefore f(x)$的单增区间为$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$,

单减区间为$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$和$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.

例2.确定 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

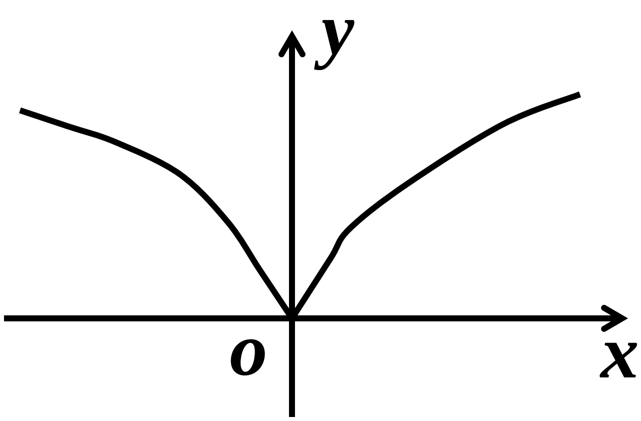
解: $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, 没有导数为0的点,但 $x=0$ 为不可导点.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

如图.



$\therefore y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单增区间为 $(0,+\infty)$,

单减区间为 $(-\infty,0)$.

例3.当$x \geq 0$时，证明$\ln(1+x) \geq \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

证明：当 $x=0$ 时，等号成立.

当$x>0$时，设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0 \quad (x>0)$$

所以 $f(x)$ 单调递增.

从而，当$x>0$时，$f(x)>f(0)$，　且 $f(0)=0$.

$$\therefore f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0.$$

即 $\ln(1+x) \geq \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

例4.证明 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证明: 设 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}\ (x \ne -1)$.

$$f'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

所以 $f(x)$ 单调递增.

$\because |a+b| \le |a|+|b|$, $\therefore f(|a+b|) \le f(|a|+|b|)$,

即 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \dfrac{|a|}{1+|a|+|b|} + \dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}$

$$\le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

例5.设 $f(x)$在$0\le x\le a$上二次可微,且$f(0)=0, f''(x)>0,$

证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在$(0,a)$内单增.

证明: 设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

又设 $G(x)=xf'(x)-f(x)$.

$G'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0 \quad (0<x<a).$

所以 $G(x)$ 单调递增.

当$x>0$时,$G(x)>G(0)=-f(0)=0.$

即 $xf'(x)-f(x)>0.$ $\therefore F'(x)>0.$ 所以 $F(x)$ 单调递增.

$\therefore \dfrac{f(x)}{x}$ 在$(0,a)$内单增.

例6.方程$\ln x = ax \ (a>0)$有几个实根.

解：设$f(x)=\ln x - ax \ (x>0)$,

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a,\ \text{令}f'(x)=0,\text{得}x=\frac{1}{a}.$$

(1)当$x<\frac{1}{a}$时, $f'(x)>0$. $f(x)$单调递增.

且$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - ax)=-\infty$,

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1,$$

当$a<\frac{1}{e}$时,$\ln\frac{1}{a}-1>0$, 当$a>\frac{1}{e}$时,$\ln\frac{1}{a}-1<0$,

故当$0<a<\frac{1}{e}$时有一实根, 当$a>\frac{1}{e}$时没有实根.

(2)当$x > \frac{1}{a}$时, $f'(x) < 0$. $f(x)$单调递减.

且$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(\ln x - ax) = -\infty$,

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\frac{1}{a} - 1,$$

当$a < \frac{1}{e}$时, $\ln\frac{1}{a} - 1 > 0$, 当$a > \frac{1}{e}$时, $\ln\frac{1}{a} - 1 < 0$,

故当$0 < a < \frac{1}{e}$时有一实根, 当$a > \frac{1}{e}$时没有实根.

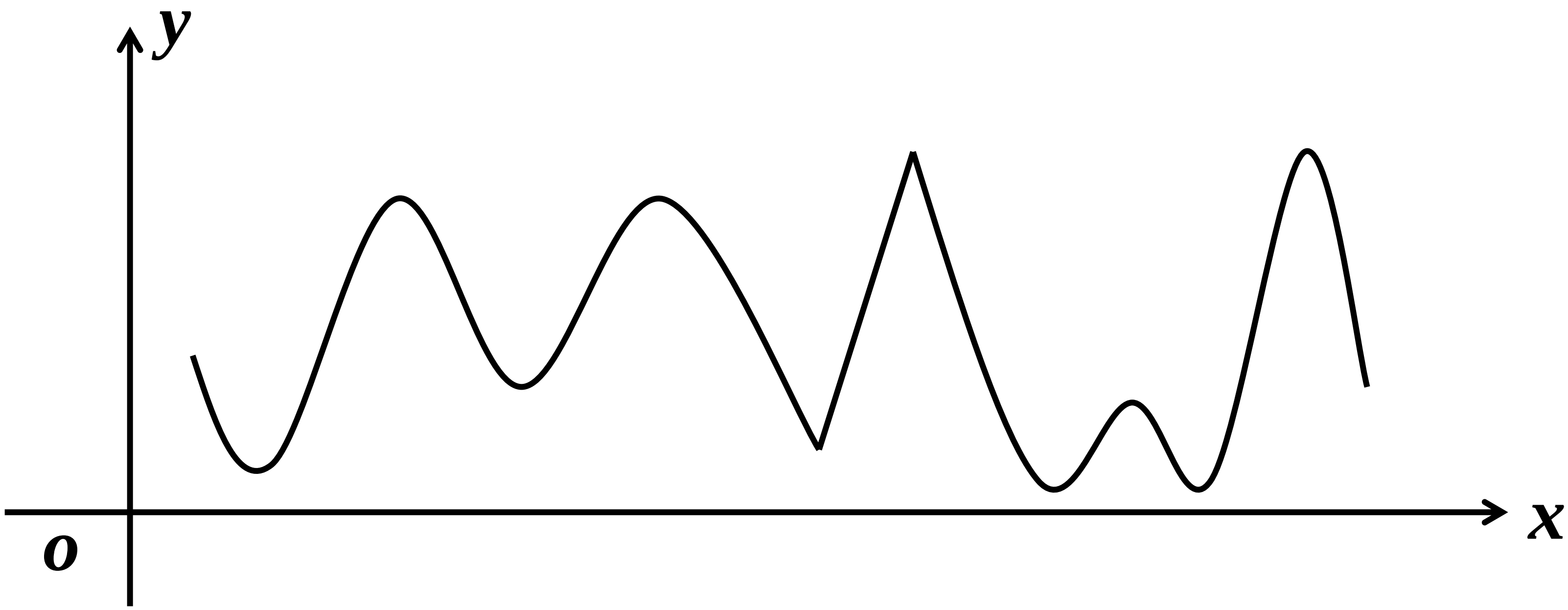
(3)当$a = \frac{1}{e}$时, $\ln x = \frac{x}{e}$, 则$x = e$.

综上所述, 当$0 < a < \frac{1}{e}$时方程有两实根, 当$a > \frac{1}{e}$时没有实根,

当$a = \frac{1}{e}$时有一实根$x = e$.

二.函数极值的判别法

1. 函数极值的定义与图形:



注意: (1) 极值是局部性质.

(2) 极大值不一定比极小值大，反之亦然.

2. 极值存在的必要条件 ------Fermat定理

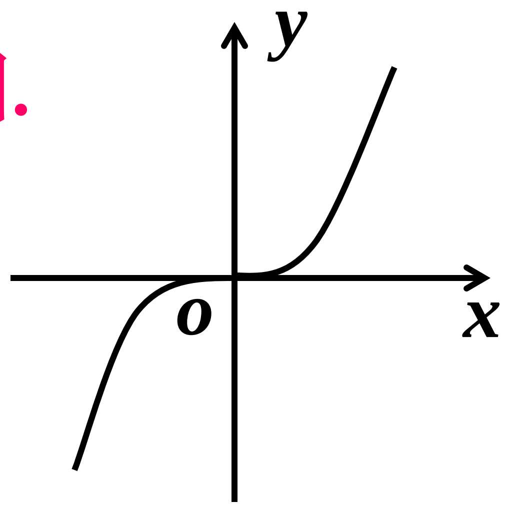
定理1. 设函数$f(x)$在x_0可导,若x_0为极值点,则$f'(x_0)=0$.

注意:

(1) 导数为0的点称为函数的驻点.($f'(x_0)=0$)

(2) 可导函数的极值点一定是驻点.

(3) 驻点只是可能的极值点. 如图.



考虑$y=x^3$在$x=0$的情况:

由$y'=3x^2=0$,得$x=0$是驻点,

但$x=0$不是$y=x^3$的极值点.

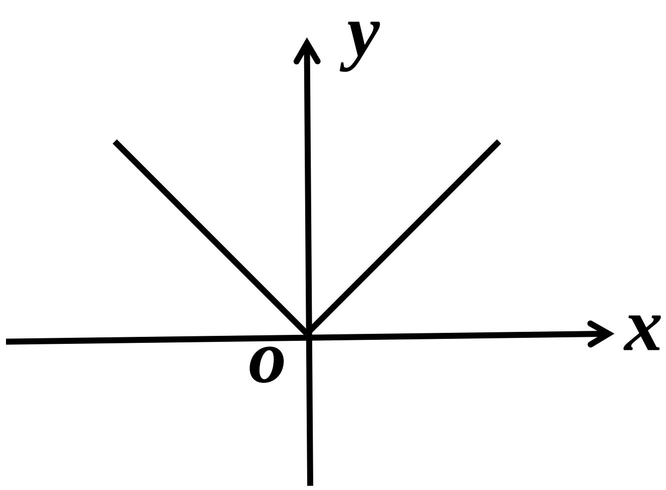
(4) 极值点应包含在驻点和不可导点之中.

考虑$y=|x|$在$x=0$的情况:

由定义可得$y=|x|$在$x=0$处不可导,

但$x=0$是$y=|x|$的极值点.

如图.



3. 极值存在的第一充分条件

定理2. 设函数$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内可导, 且 $f'(x_0)=0$.

(1) 当$x<x_0$时$f'(x)>0$, 当$x>x_0$时$f'(x)<0$,

则$f(x)$在x_0处取得极大值$f(x_0)$.

(2) 当$x<x_0$时$f'(x)<0$, 当$x>x_0$时$f'(x)>0$,

则$f(x)$在x_0处取得极小值$f(x_0)$.

(3) 当$x\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时$f'(x)>0$或$f'(x)<0$,

则$f(x_0)$不是极值.

证明: 由极值的定义来证明.

(1) 当$x < x_0$时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 单调递增. $\therefore f(x) < f(x_0)$.

当$x > x_0$时, $f'(x) < 0$,

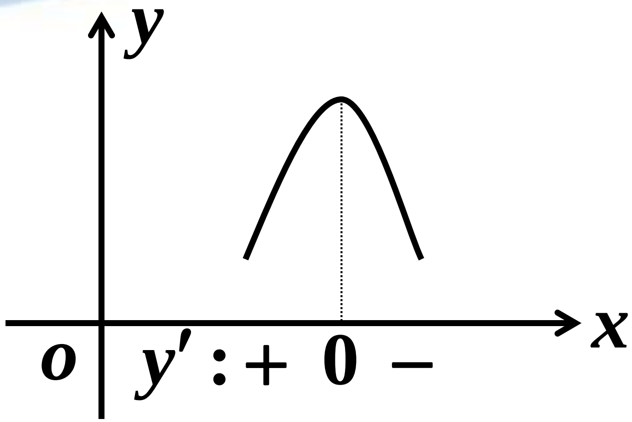
故 $f(x)$ 单调递减. $\therefore f(x) < f(x_0)$.

即$x \in U(\tilde{x}_0, \delta)$时, 都有 $f(x) < f(x_0)$.

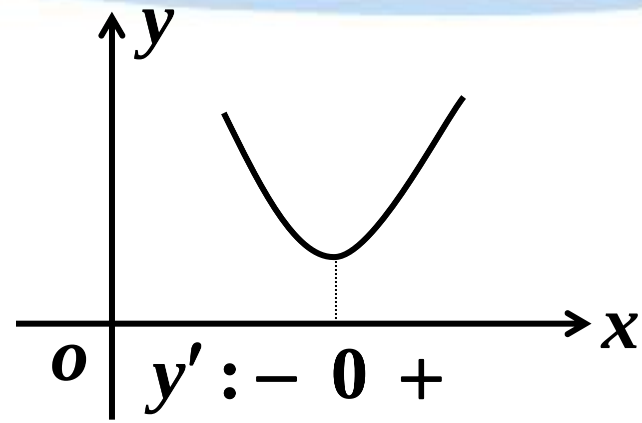
$\therefore f(x_0)$ 为极大值.

同理可证得结论(2),(3)成立.

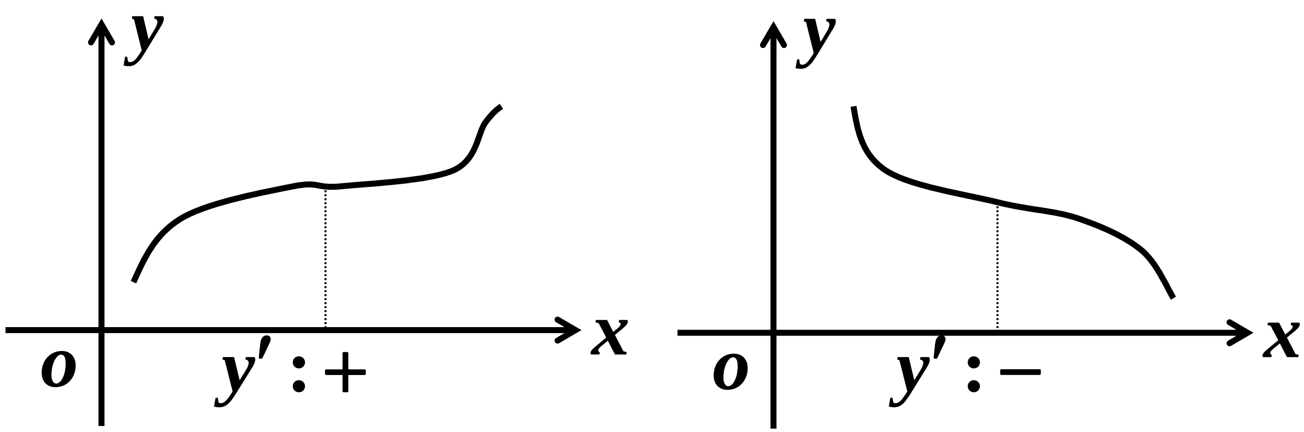
极值存在的第一充分条件的图形记忆法.



极大



极小



没有极值

4. 极值存在的第二充分条件

定理3.

设$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内二阶可导,且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.则

(1) 若$f''(x_0)>0$, 则 x_0 为极小值点.

(2) 若$f''(x_0)<0$, 则 x_0 为极大值点.

证明: (1) $\because\ f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

$\therefore$ 当$x<x_0$时, $f'(x)<0$,

当$x>x_0$时, $f'(x)>0$.

从而 x_0 是极小值点.

同理可证得(2)成立.

注意:

(1) 使二阶导数不为0的点一定是极值点.

(2) 若$f''(x_0)=0$或$f''(x_0)$不存在,

不能用第二充分条件判定,只能用第一充分条件.

5. 求极值的步骤

(1) 写出 $f(x)$的定义域.

(2) 计算 $f'(x)$.

(3) 求出驻点和不可导点.

(4) 由充分条件定理判定驻点和不可导点是否是极值点.

(5) 求出极值点处的函数值即得全部极值.

函数的极值习例

例7. 求$f(x)=2x^3-3x^2-12x+21$的极值.

例8. 求$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

例9. 求$f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

例10. 设$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$,求$f(x)$的极值.

例11. 设$f(x)=a\ln x+bx^2+x$,在$x=1, x=2$处有极值,求a,b;并确定是极大值还是极小值.

例7.求$f(x)=2x^3-3x^2-12x+21$的极值.

解: $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$.

令$f'(x)=0$, 得 $x_1=-1, x_2=2$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$\therefore$ 极大值为$f(-1)=28$, 极小值为$f(2)=1$.

例8.求$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解: $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$.

令$f'(x)=0$, 得 $x=1$. 且 $x=0$为不可导点.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$\therefore$ 极大值为 $f(0)=0$, 极小值为 $f(1)=-3$.

例9.求$f(x)=(x^2-1)^3+1$的极值.

解: $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=-1, x=0, x=1$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	极小	↗		↗

$\therefore f(x)$ 只有极小值 $f(0)=0$.

注: 也可用二阶导数来判定极值!

例10.设$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$,求$f(x)$的极值.

解: 当$0<x<1$时, $f'(x)=1>0$.

当$1<x<2$时, $f'(x)=-1<0$.

$\therefore f(x)$没有驻点.

但 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-x-1}{x-1}=-1,$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1,$

$\therefore x=1$为不可导点.

列表讨论如下:

x	$(0,1)$	1	$(1,2)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$

$\therefore f(x)$ 有极大值 $f(1)=1.$

例11.设$f(x)=a\ln x+bx^2+x$,在$x=1,x=2$处有极值,求a,b;并确定是极大值还是极小值.

解: $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1,\quad f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}+2b,$

$\because f(x)$在 $x=1,x=2$处有极值,

$\therefore f'(1)=0, f'(2)=0.$

即 $\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases},\quad \therefore a=-\dfrac{2}{3}, b=-\dfrac{1}{6}.$

从而 $f''(x)=\dfrac{2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}.$

$\because f''(1)=\dfrac{1}{3}>0,\quad \therefore f(1)$是极小值;

$\because f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0,\quad \therefore f(2)$是极大值.

三.函数的最值

1. 闭区间[a,b]上可导函数 $f(x)$ 的最值.

$$M=\max\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n)\}.$$

$$m=\min\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n)\}.$$

其中$x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$为驻点.

2. 闭区间[a,b]上连续函数 $f(x)$ 的最值.

$$M=\max\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(t_1),\cdots,f(t_m)\}.$$

$$m=\min\{f(a),f(b),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(t_1),\cdots,f(t_m)\}.$$

其中$x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$为驻点; $t_j\ (j=1,2,\cdots,m)$为不可导点.

3. 开区间 (a,b) 或无穷区间上的最值.

这时可能有最值，可能没有最值.

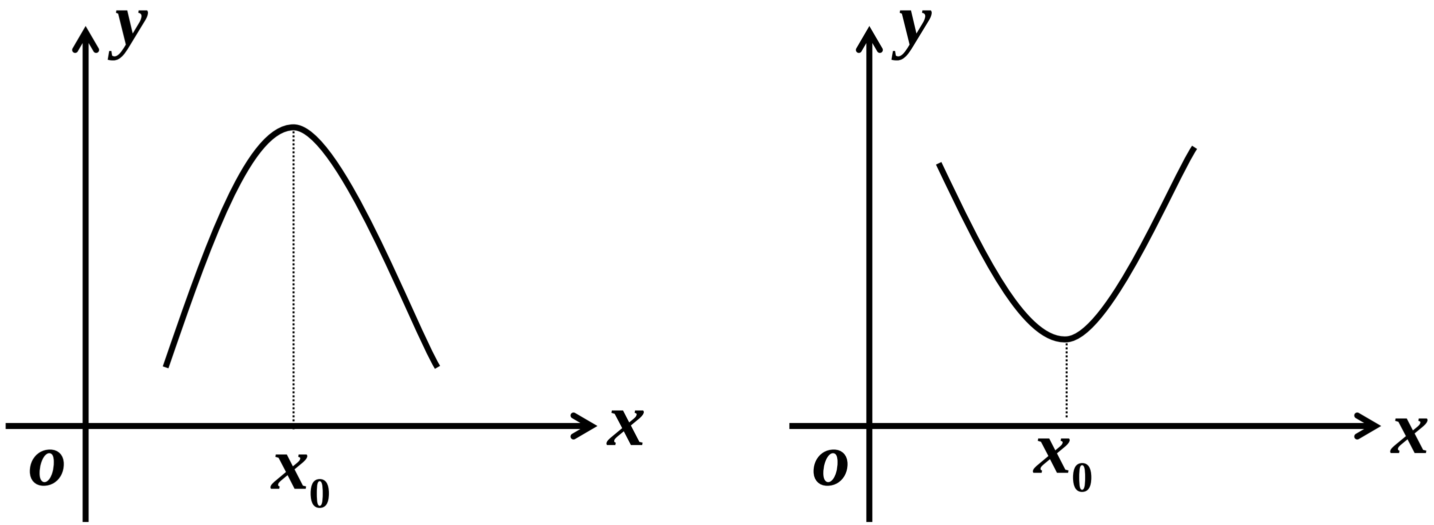
对于(a,b), 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$比驻点和不可导点处的函数值都大则没有最大值,都小则没有最小值.

对于$(-\infty,+\infty)$,若 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$比驻点和不可导点处的函数值都大则没有最大值,都小则没有最小值.

4. $f(x)$在I内可导, 且只有唯一一个驻点x_0时的最值.

若驻点x_0为极值点, 当$f(x_0)$为极大值时即为最大值.

当$f(x_0)$为极小值时即为最小值.



5. 实际问题的最值

实际问题中, 可根据问题的性质判定可导函数有最值, 而且在区间内部取得. 若$f(x)$在区间内部只有一个驻点, 则一定在驻点处取得最值.

函数的最值习例

例12. 求$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ 在$[0,\frac{3}{2}]$上的最值.

例13. 从一块边长为a的正方形铁皮的四角上截去同样大小的正方形，然后折成一个无盖盒子，问要截截去多大的小方块，才使盒子容量最大?

例14. 把一根直径为d 的圆木锯成矩形梁, 问矩形截面的高h和宽b应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

例12. 求$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ 在$[0,\frac{3}{2}]$上的最值.

解: $f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+(x-1)^2 3(x-2)^2$

$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7)$$

令$f'(x)=0$ 得$x_1=1,\ x_2=\frac{7}{5},\ x_3=2$ (舍去)

而 $f(0)=-8,\quad f(1)=0,$

$$f(\frac{7}{5})=-\frac{108}{3125},\quad f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{32}.$$

$\therefore$ 最大值为 $f(1)=0$, 最小值为 $f(0)=-8$.

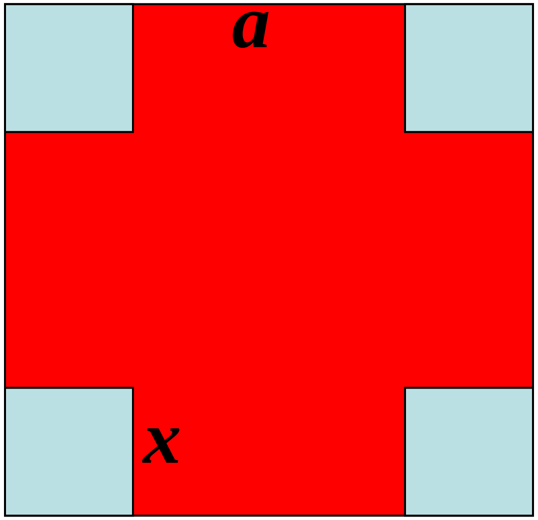
例13. 从一块边长为a的正方形铁皮的四角上截去同样大小的正方形，然后折成一个无盖盒子，问要截去多大的小方块，才使盒子容量最大?

解: 如图所示

$$V(x)=x(a-2x)^2,(0<x<\frac{a}{2})$$

令$V'(x)=(a-2x)(a-6x)=0,$

得 $x=\frac{a}{6}$, $x=\frac{a}{2}$.



在$(0,\frac{a}{2})$内只有唯一驻点 $x=\frac{a}{6}$.

且 $V''(\frac{a}{6})=(24x-8a)\big|_{x=\frac{a}{6}}=-4a<0.$

$\therefore x=\frac{a}{6}$为极大值点,

$\therefore$当截去边长为$x=\frac{a}{6}$的小方块时,可达到盒子容量最大.

注意:

利用最大最小值可证明不等式.

例14. 把一根直径为d 的圆木锯成矩形梁, 问矩形截面的高h和宽b应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

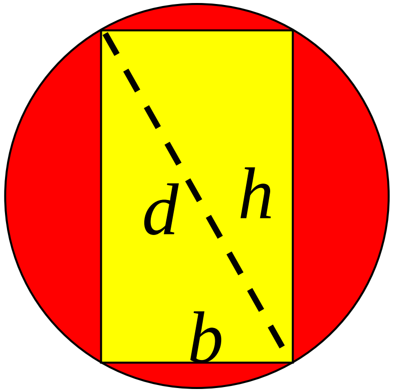
$$w=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(d^2-b^2),\qquad b\in(0,d)$$

令 $$w'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$$

得 $$b=\sqrt{\frac{1}{3}}\,d$$

从而有 $$h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,d$$

即 $$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$$



由实际意义可知, 所求最值存在, 且驻点只一个,

故所求结果就是最好的选择.

思考题： 习题2.3 第1题（1）到（3）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.3 第13题到第16题

练习参考答案