高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.2 中值定理

2.2.1 中值定理

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.2 中值定理

微分中值定理

- 2.2.1 中值定理
  - 函数极值的概念
  - Fermat 定理
  - Rolle定理
    - Rolle定理
    - Rolle定理应用习例1-5
  - Lagrange中值定理
    - Lagrange定理
    - Lagrange定理应用习例6-7
  - Cauchy中值定理
    - Cauchy定理
    - Cauchy定理应用习例8-9
- 内容小结
- 课堂思考与练习

导数与差商

函数导数的定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

即函数在点 x 处的导数等于 $\Delta x\to 0$ 时，函数

在点 x 处的差商 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 的极限值.

我们常常需要从函数的导数所给出的局部的或“小范围”性质, 推出其整体的或“大范围”性质. 为此, 我们需要建立函数的差商与函数的导数间的基本关系式, 这些关系式称为“微分学中值定理”.

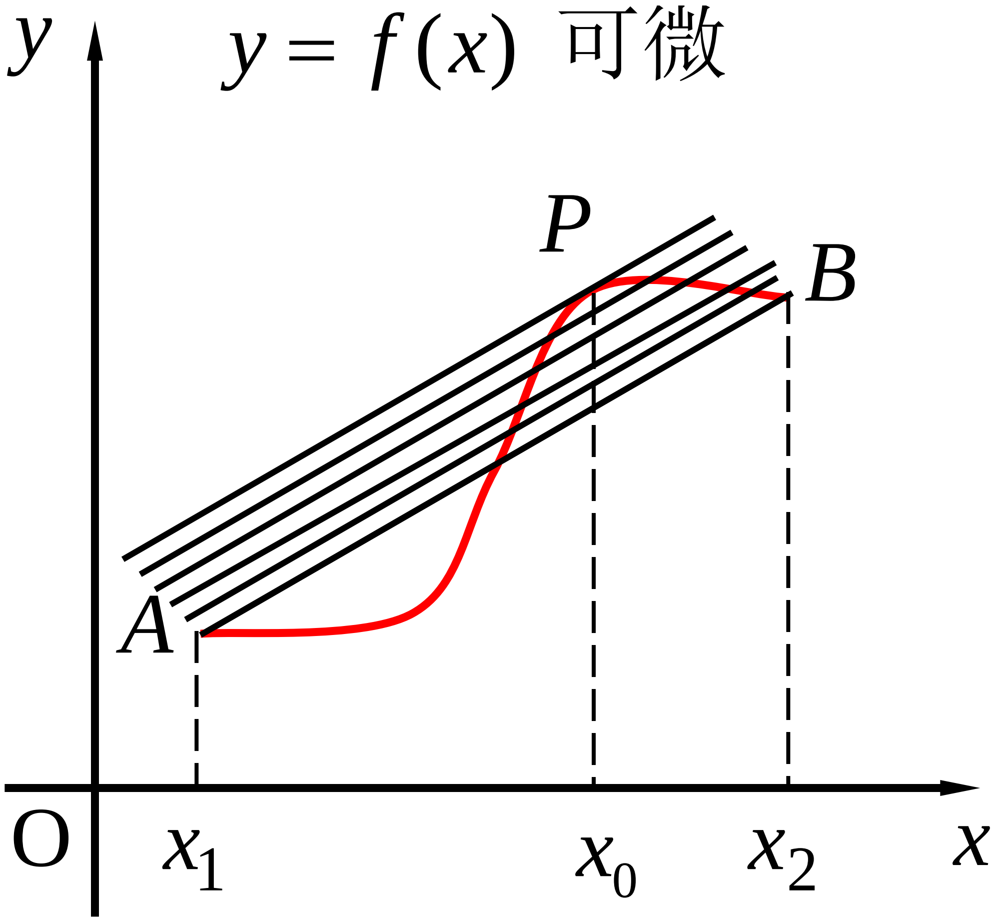
这些中值定理的创建要归功于费马、拉格朗日、柯西等数学家.

首先, 从直观上来看看

“函数的差商与函数的导数间的基本关系式

是怎么一回事.

导数与差商



点 P 处切线的斜率：

$$k = f'(x_0)$$

相等！

割线 AB 的斜率：

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

将割线作平行移动，那么它至少有一次会达到这样的位置：

在曲线上与割线距离最远的那一点P处成为切线，即在点P处与曲线的切线重合.

也就是说，至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

该命题就是微分中值定理.

一. 函数极值的概念

定义:

设$f(x)$在(a,b)内有定义, $x_0 \in (a,b)$,当$x \in U(\tilde{x}_0,\delta)$时,

(1) 若$f(x) < f(x_0)$,则$f(x_0)$为极大值;

(2) 若$f(x) > f(x_0)$,则$f(x_0)$为极小值.

极大值和极小值统称为极值, 取得极值的点称为极值点.

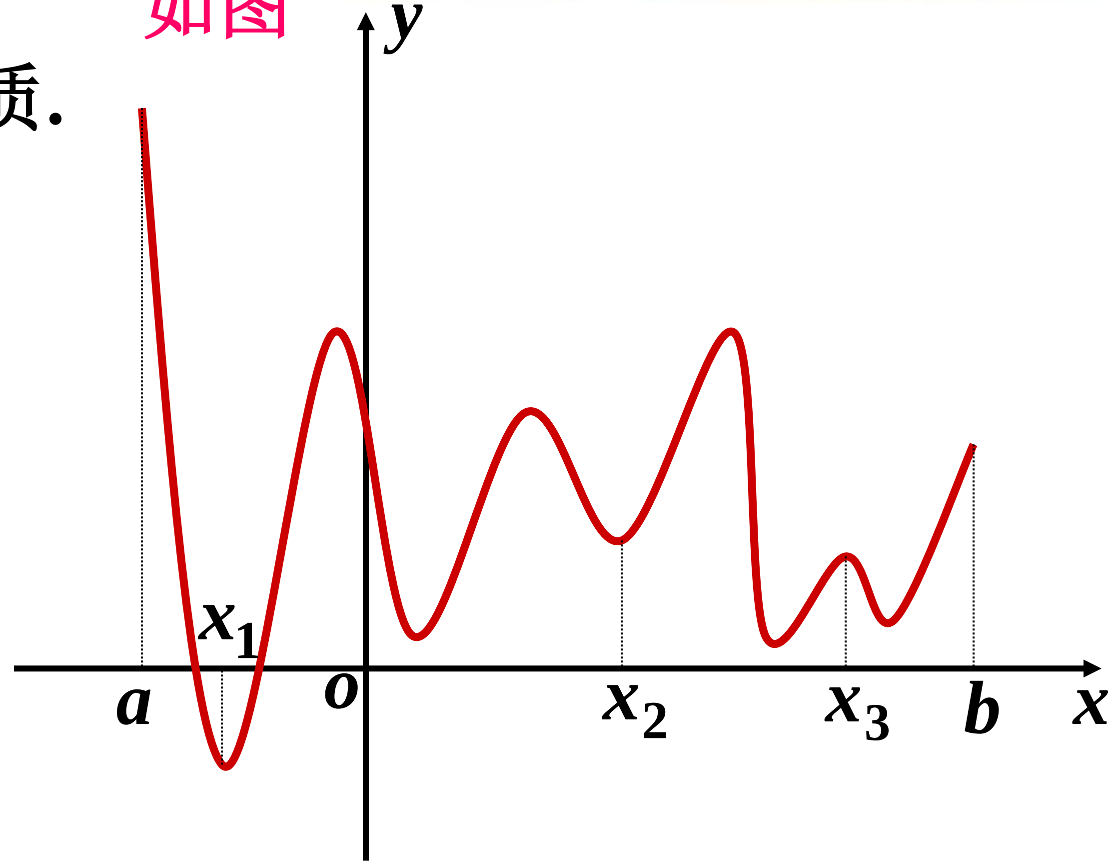
注意:

(1)极值点指的是横坐标x，极值指的是函数值$f(x)$.

(2)极值点必须在区间的内部.

(3)极值是局部性质，而最值是全局性质.

如图



(4)极小值不一定比极大值小.

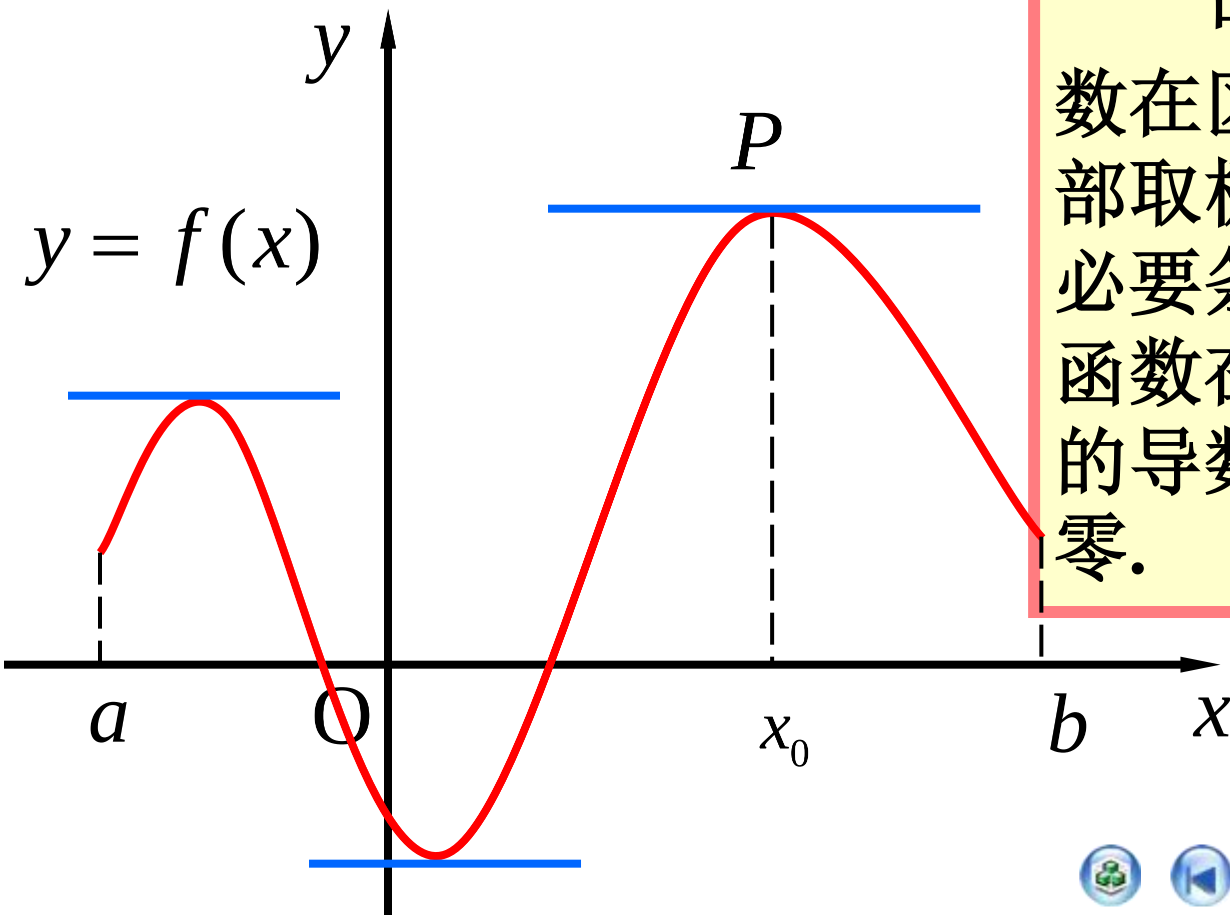
(5)区间内部的最值点一定是极值点；反之不一定成立.

二. Fermat 定理

费马，P. de

定理1. 设函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处取得极值，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$.

如何证明？



可微函数在区间内部取极值的必要条件是函数在该点的导数值为零.

证明: 设 $f(x_0)$ 是极大值.

则当 $x \in U(\tilde{x}_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) < f(x_0)$.

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$\therefore f'(x_0) = 0.$$

（极小值类似可证）

三. Rolle定理

定理2. 若函数 $f(x)$ 满足:

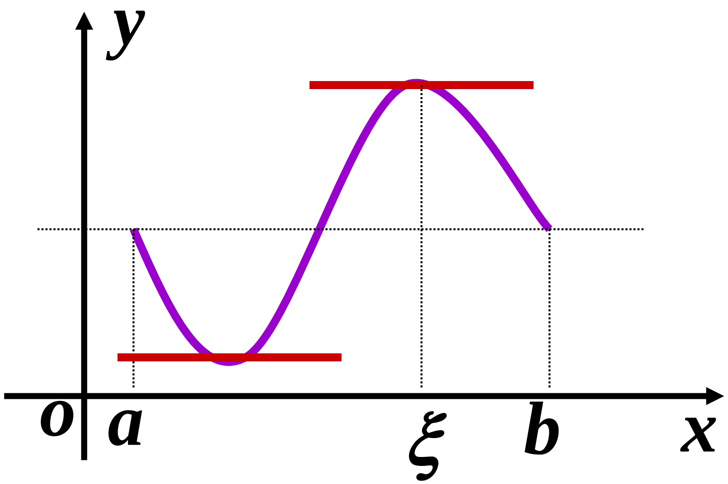
(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导;

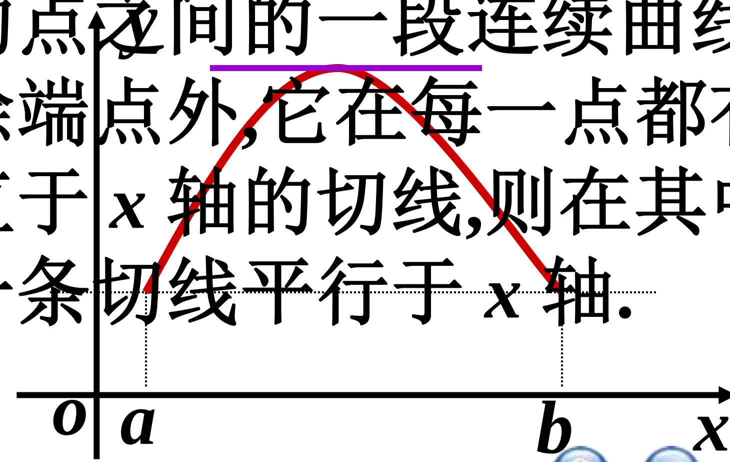
(3) $f(a)=f(b)$

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

几何意义:



Rolle定理指出在两个高度相同的点之间的一段连续曲线上,若除端点外,它在每一点都有不垂直于 x 轴的切线,则在其中必有一条切线平行于 x 轴.



证明: $\because f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,

$\therefore f(x)$在闭区间$[a,b]$上有最大值M和最小值m,

(1)若$M=m$, 则$f(x)\equiv C, x\in[a,b]$

$\therefore f'(x)=C'=0$,对于一切$x\in(a,b)$. 取$\xi=x$.

(2)若$M\neq m$,则$f(x)$在$[a,b]$上不是常数.

$\because f(a)=f(b)$,则M,m不可能同时在端点取得.

不妨设$M\neq f(a)$,

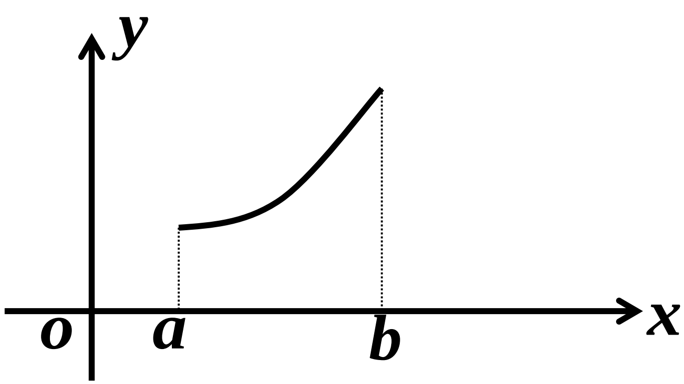
则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=M$.

则此点ξ也是$f(x)$的极大值点.

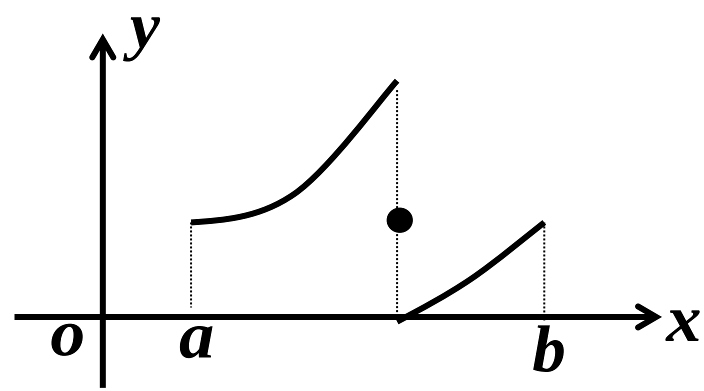
由Fermat定理可知, $f'(\xi)=0$.

注意:

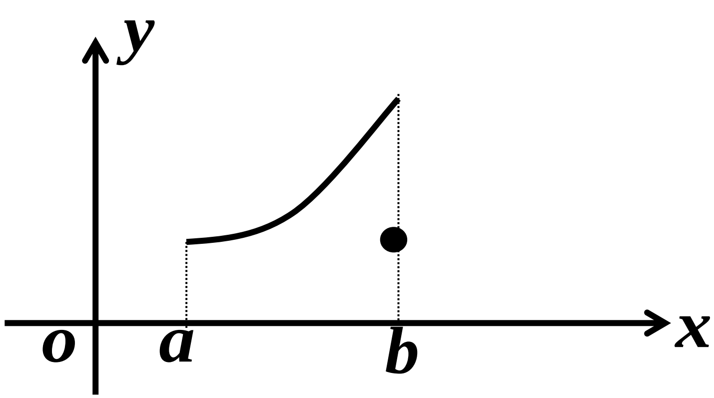
定理的条件是充分的，但非必要. 不满足条件有可能结论不成立. 如图



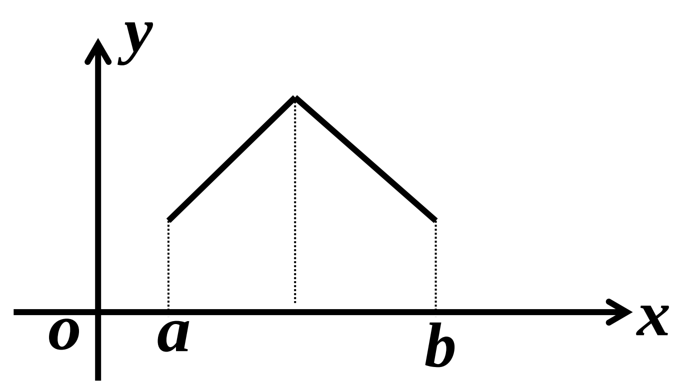
$f(a) \neq f(b)$



区间内有不连续点



端点*b*处不连续



区间内有不可导点

推论: 可导函数$f(x)$任意两零点间至少有导函数$f'(x)$的一个零点.

Rolle定理应用习例

例1.设$f(x)=x^2+2x-3$,

验证Rolle定理对$f(x)$在$[-3,1]$上的正确性.

例2.设多项式$p(x)$的导函数$p'(x)$没有实根,

试证$p(x)$最多只有一个实根.

例3.若 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在(a,b)内可导, 证明在(a,b)内

方程$2x[\phi(b)-\phi(a)]=(b^2-a^2)\phi'(x)$ 至少存在一个根.

例4.证明方程$x^5-5x+1=0$有且仅有一个小于1的正根.

例5.设 $f(x)$ 二阶可导,且

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3),(x_1<x_2<x_3),$$

试证至少存在一点$\xi\in[x_1,x_3]$,使得$f''(\xi)=0$.

例1.设$f(x)=x^2+2x-3$,

验证Rolle定理对$f(x)$在$[-3,1]$上的正确性.

解: (1) $\because f(x)$是初等函数,

$\therefore f(x)$在闭区间$[-3,1]$上连续.

(2) $\because f'(x)=2x+2$,

$\therefore f(x)$在$(-3,1)$内可导.

(3) $f(-3)=0=f(1)$.

(4)设$f'(x)=2x+2=0$, 则$x=-1\in(-3,1)$,

$\therefore$取$\xi=-1\in(-3,1)$.

例2.设多项式$p(x)$的导函数$p'(x)$没有实根,

试证$p(x)$最多只有一个实根.

证明:（反证法）

假设$p(x)$至少有两个实根. 设为x_1和x_2,且$x_1 < x_2$.

由于多项式$p(x)$是连续可导的, 且$p(x_1) = p(x_2) = 0$.

$\therefore$多项式函数$p(x)$在$[x_1, x_2]$上满足Rolle定理的条件,

从而至少存在一点$\xi \in (x_1, x_2)$,使得$p'(\xi) = 0$.

这与题设"$p'(x)$没有实根"相矛盾.

例3.若 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在(a,b)内可导,证明在(a,b)内方程$2x[\phi(b)-\phi(a)]=(b^2-a^2)\phi'(x)$ 至少存在一个根.

分析:

$$(b^2-a^2)\varphi'(x)-2x[\varphi(b)-\varphi(a)]=0,$$

$$(b^2-a^2)\varphi'(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)](x^2)'=0,$$

$$\{(b^2-a^2)\varphi(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)](x^2)\}'=0.$$

证明: 设 $f(x)=(b^2-a^2)\varphi(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)]x^2$,

则 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导.

$$f(a)=b^2\varphi(a)-a^2\varphi(b)=f(b).$$

由Rolle定理得: 至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

即 $(b^2-a^2)\varphi'(\xi)-[\varphi(b)-\varphi(a)]2\xi=0.$

例4.证明方程$x^5-5x+1=0$有且仅有一个小于1的正根.

证明: (1) 存在性 .

设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1$, $f(1)=-3$. 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0.

(2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1)$, $x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$, $\because$ $f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件, $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0$, $x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

例5.设 $f(x)$ 二阶可导,且

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3),(x_1<x_2<x_3),$$

试证至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_3]$,使得 $f''(\xi)=0$.

证明: $\because f(x)$ 二阶可导,

$\therefore f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上连续;

$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 和 (x_2,x_3) 内可导.

由 $f(x_1)=f(x_2)$,

至少存在一点 $\xi_1\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi_1)=0$.

由 $f(x_2)=f(x_3)$,

至少存在一点 $\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得 $f'(\xi_2)=0$.

而 $f'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上连续;

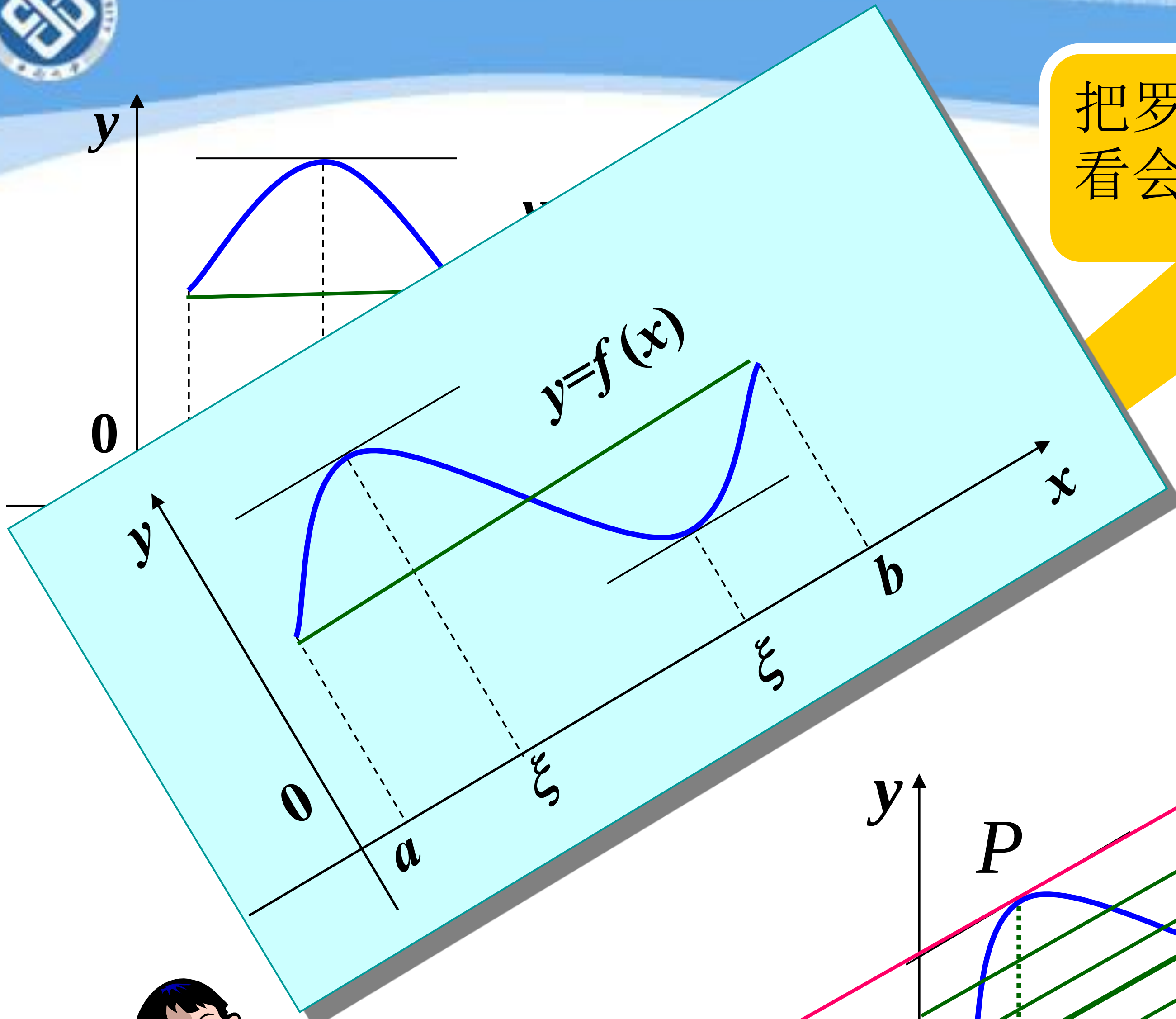
$f'(x)$ 在(ξ_1,ξ_2)内可导.

$$f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2).$$

由Rolle定理，得

至少存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$,

使得 $f''(\xi)=0$.



把罗尔定理的图示歪斜着
看会有什么不同呢？

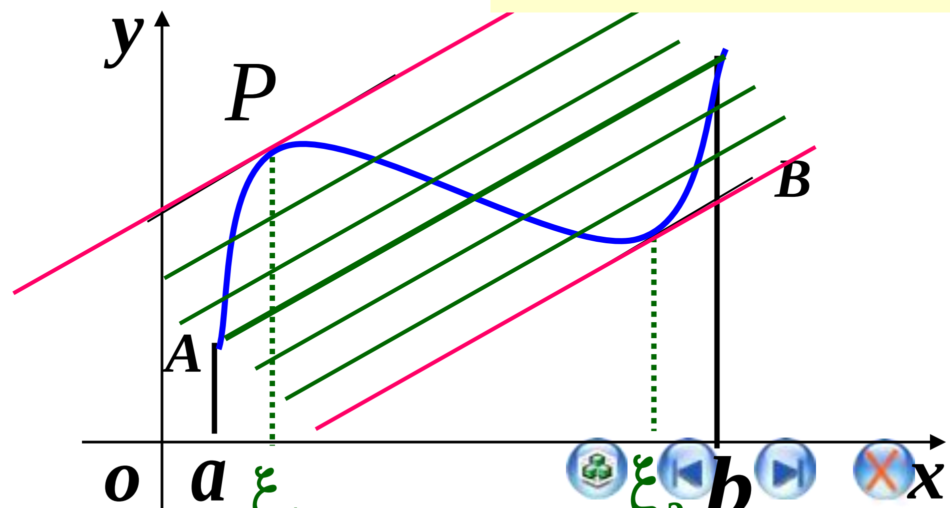
点 P 处切线的斜率：

$$k = f'(\xi)$$

相等！

弦线$\overline{AB}$的斜率：

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



四. Lagrange 中值定理

定理3. 若函数 $f(x)$ 满足:

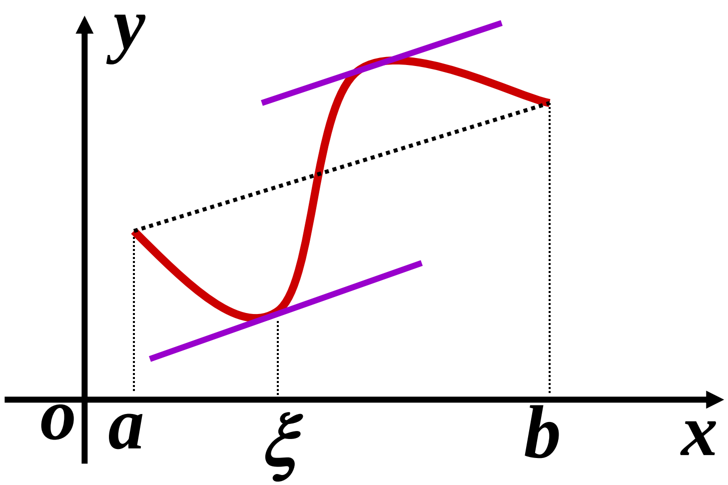
(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导;

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

几何意义:



Lagrange中值定理指出若曲线 $y=f(x)$在(a,b)内每一点都有不平行于 y 轴的切线,则在曲线上至少存在一点$P(\xi,f(\xi))$,使曲线在P的切线平行于过曲线两端点 A, B 的弦.

分析:

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x'=0$$

$$\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'=0$$

证明: 设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x,\ \ x\in[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

$$F(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b)$$

由Rolle定理得,

至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得$F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$

$\therefore f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$ 或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

当$b<a$时, $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$

$\Rightarrow\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$

注意:

(1) 令 $f(a)=f(b)$, 则Lagrange中值定理$\Rightarrow$Rolle定理.

(2) 在Lagrange中值公式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$中,

$$a<\xi<b,\quad 0<\xi-a<b-a,\quad 0<\frac{\xi-a}{b-a}<1,$$

令$\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$, 则$\xi=a+\theta(b-a)$, $0<\theta<1$.

从而Lagrange中值公式可写为

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a),\ 0<\theta<1.$$

取$a=x, b=x+\Delta x$时有,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.$$

即 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.$ 称为有限增量定理.

(3) 拉格朗日中值定理的物理意义

拉格朗日中值定理告诉我们, 在 $t=a$ 到 $t=b$ 的时间段内, 连续运动的物体至少会在某一时刻达到它的平均速度.

(4)Lagrange中值公式精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

3. 拉格朗日中值定理的三个重要推论

(1)推论1设$f(x)$在区间I上可导，且$f'(x)=0, \forall x\in I$.

则$f(x)=C, x\in I$. (C为常数)

证：$\forall x_1,x_2\in I$, 不妨令$x_1<x_2$, 则$f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足拉格朗日中值定理条件，故有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \ \xi\in(x_1,x_2)$$

而 $f'(\xi)=0$，故 $f(x_2)=f(x_1)$

由x_1, x_2的任意性，$f(x)=C, x\in I$. (C为常数)

(2)推论2. 若$f'(x)=g'(x)$，$x\in I$, 则 $f(x)=g(x)+C$, $x\in I$ (C为常数)

证：令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 由推论1立即可证.

(3)推论3. 若$f(x)$的导数在(a, b)内不变号，则函数$f(x)$在(a, b)内严格单调.

Lagrange定理应用习例

例6.证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

例7.证明:当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

例8. 假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 且 对 $\forall x \in [0,1]$ 有 $0 < f(x) < 1$, 对 $\forall x \in (0,1)$ 有 $f'(x) \neq 1$.

证明:存在唯一的 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$.

例6.证明等式$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证明: 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$,

则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导.

又 $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0,$$

$\therefore$ 在 $(-1,1)$ 内恒有 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=C$.

又当 $x=0$ 时, 有 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}=C$.

$$\therefore \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

例7.证明：当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明：利用Lagrange中值定理证明不等式时，

选择$f(x)$及区间$[a,b]$，且利用$a<\xi<b$.

设 $f(t)=\ln t,\quad t\in[1,1+x]$.

显然，$f(t)$在$[1,1+x]$上连续，在$(1,1+x)$内可导，

由Lagrange中值定理，则

$$f(1+x)-f(1)=f'(\xi)x,\quad 且\ \xi\in(1,1+x)$$

即 $\ln(1+x)=\frac{x}{\xi}$，且$1<\xi<1+x$

又由 $1<\xi<1+x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{\xi}<1$

$$\therefore \quad \frac{x}{1+x}<\frac{x}{\xi}<x, \qquad (x>0)$$

从而 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

注意:

设 $f(t)=\ln(1+t),\ \ t\in[0,x]$同样可证得结论成立!

例8

假设 $f(x)$在 $[0,1]$上连续可导, 且 对一切$x\in[0,1]$ 有$0<f(x)<1$,

对一切$x\in(0,1)$有$f'(x)\neq 1$.

证明:存在唯一的$\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证　构造辅助函数,令 $F(x)=f(x)-x$

显然, $F(x)$ 在$[0,1]$上连续, 且$F(0)=f(0)>0$, $F(1)=f(1)-1<0$,

$F(x)$满足零点定理的条件, 则至少存在$\xi\in(0,1)$,

使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

下面证明唯一性.

假设有两个点 $x_1, x_2 \in (0,1)$ ($x_1 < x_2$), such that

$$f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2.$$

$f(x)$在 $[x_1, x_2]$满足拉格朗日中值定理的条件 ,则

$\exists\ \delta \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$, such that

$$f'(\delta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1$$

但是, $x \in (0,1)$时, $f'(x) \neq 1$, 矛盾.

所以存在唯一的$\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi) = \xi$.

设弧 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases} \qquad t \in [a,\ b]$$

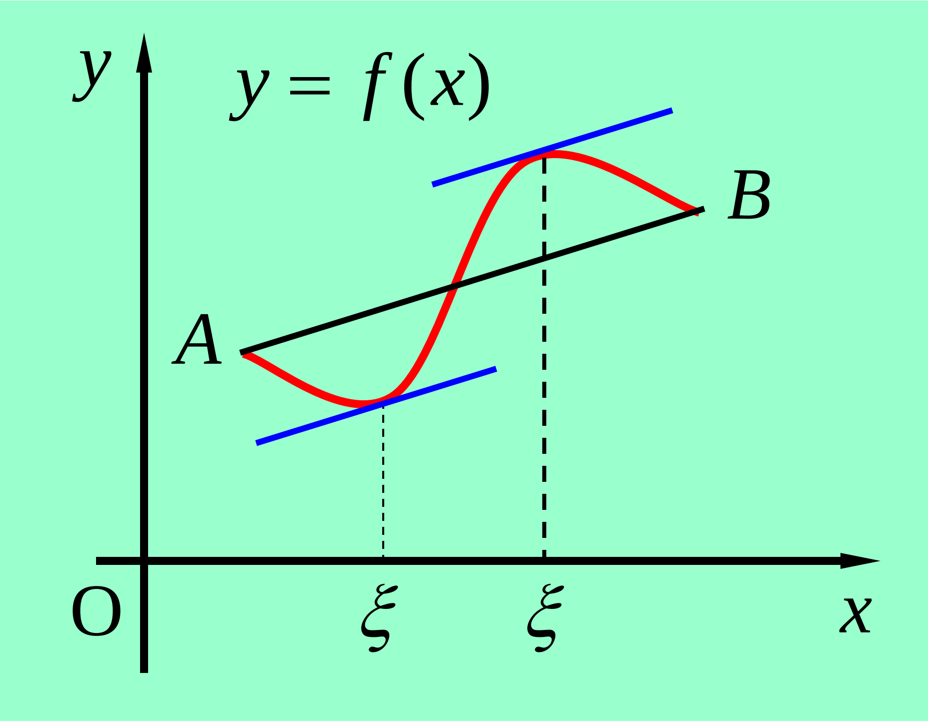
在拉格朗日中值定理中，将曲线用参数方程表示，会出现什么结论？

则弧 AB 上任意一点处的切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

而弦 $\overline{AB}$ 的斜率为

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



五. Cauchy中值定理

定理4. 若函数 $f(x), g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

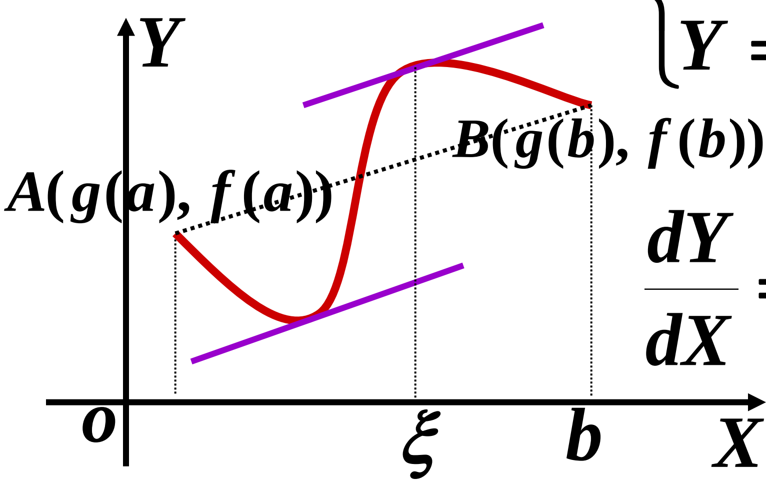
(2) 在开区间(a,b)内可导;

(3) $g'(x) \neq 0$

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

几何意义:

$$\begin{cases} X = g(x) \\ Y = f(x) \end{cases}$$



$$\frac{dY}{dX} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cauchy中值定理指出在定理条件下, 用参数方程表示的曲线上至少有一点, 它的切线平行于两端点的连线.

分析: $$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)=0$$

$$\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)\right]'=0$$

证明: 设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x),\ x\in[a,b]$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导.

$$F(a)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}=F(b)$$

由Rolle定理得,

至少存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$F'(\xi)=0$.

即 $$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$$

又 $g'(x)\neq 0$, $$\therefore \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

注意:

(1)令$g(x)=x$,则Cauchy中值定理$\Rightarrow$Lagrange中值定理.

(2)Cauchy中值定理能否用如下方法证明,为什么?

对$f(x)$,$g(x)$分别应用Lagrange中值定理后相比得结论.

有人想：分子分母分别用拉格朗日中值定理，

就可证明柯西中值定理了.

$f(x), g(x) \in C([a, b])$,

$f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$,

$f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上，满足拉格朗日中值定理条件

故 $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

两个 ξ 相同吗？

Cauchy定理应用习例

例9. 若$ab>0$, 证明 $ae^b - be^a = (\xi-1)e^{\xi}(b-a)$,

其中ξ 在 a, b之间.

例10.试证至少存在一点$\xi\in(1,e)$使得$\sin 1=\cos\ln\xi$.

例11 **设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明: 至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.**

例9. 若$ab>0$,证明 $ae^b-be^a=(\xi-1)e^\xi(b-a)$,

其中ξ 在 a, b之间.

分析: $$\frac{ae^b-be^a}{b-a}=(\xi-1)e^\xi,$$

$$\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=(\xi-1)e^\xi, \qquad \frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^\xi,$$

证明: 设 $0<a<b$,

设 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}, \ x\in[a,b]$.

显然, $f(x),g(x)$满足Cauchy中值定理的条件.

由Cauchy中值定理, 至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{e^\xi\xi-e^\xi}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}},$$

即 $ae^b-be^a=(\xi-1)e^\xi(b-a)$.

例10.试证至少存在一点$\xi\in(1,e)$使得$\sin 1=\cos\ln\xi$.

证明: 法1 用柯西中值定理. 令

$$f(x)=\sin\ln x,\quad F(x)=\ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 $[1,e]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此

$$\frac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad \xi\in(1,e)$$

即

$$\sin 1=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$$

分析:

$$\sin 1=\cos\ln\xi \iff \frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例9.试证至少存在一点$\xi \in (1,e)$使得$\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1,e)$，使

$$f'(\xi) = 0$$

$$\Big\downarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$

例11 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证 分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$,

则 $f(x),g(x)$在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,

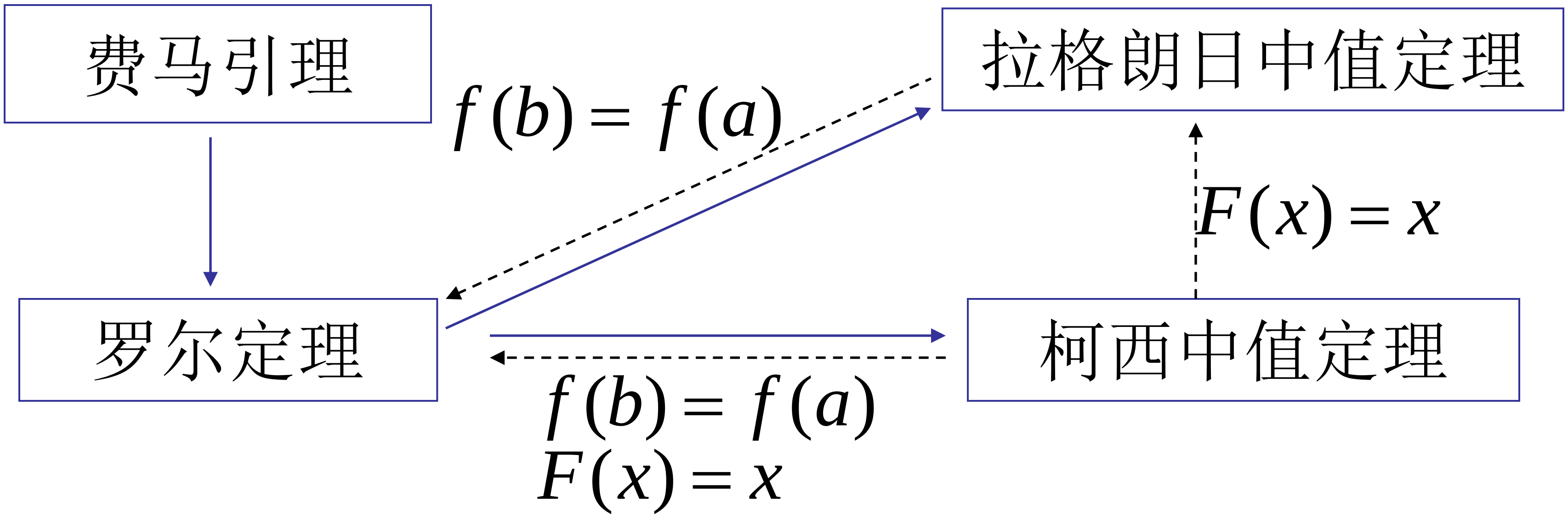
$\therefore$在$(0,1)$内至少存在一点ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数

思考题： 习题2.2 第1题（1）到（3）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.2 第9题到第11题

练习参考答案

练习 1 （罗） 设$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$，$a<b<c<d$为实数. 证明方程 $f'(x)=0$，有且仅有三个实根，并指出这三个根所在区间.

证：$\because f(x)$是一个四次多项式

$\therefore f(x)$在$[a, b], [b, c], [c, d]$上连续，可导，

又 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0$

故 $f(x)$在$[a, b], [b, c], [c, d]$上满足Rolle定理条件.

从而， $\exists\xi_1\in(a, b), \xi_2\in(b, c), \exists\xi_3\in(c, d)$, 使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

$\because$ $f(x)$是一个四次多项式,

$\therefore$ $f'(x)$是一个三次多项式, 它最多有三个实根,

故 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根:

$$\xi_1\in(a, b),\ \xi_2\in(b, c),\ \xi_3\in(c, d).$$

练习 2 (罗)设$a_0, a_1, \ldots, a_n$ 满足 $a_0+\frac{1}{2}a_1+\cdots+\frac{1}{n}a_{n-1}+\frac{1}{n+1}a_n=0,$

证明 方程$a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$

在(0, 1)内至少有一实根

证: 令$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

则，$f(x)\in C([0, 1])$，在(0, 1)内可导。

又 $f(0)=0$, $f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0$

即 $f(0)=f(1)$ 故 $f(x)$满足Rolle定理条件.

由Rolle定理,

$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_{n-1}\xi^{n-1}+a_n\xi^n=0$

命题获证.

(拉练习 1) 证明：当$0<a<b$时，$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

证　即要证 $\dfrac{1}{b}(b-a)<\ln b-\ln a<\dfrac{1}{a}(b-a)$

令$f(x)=\ln x, x\in[a,b]$,

知　$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，

故　$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$,

$$\because \frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{b}<\frac{b-a}{a}$$

(拉练习 2). 证明：若$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内满足关系式

$f'(x)=f(x)$，$f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

证：要证 $f(x)=e^x, x\in(-\infty, +\infty)$，

即要证 $\dfrac{f(x)}{e^x}\equiv 1, x\in(-\infty,+\infty)$,

令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}, x\in(-\infty,+\infty)$. (问题转化为证明$\varphi'(x)=0$)

$$\because \quad \varphi'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0,$$

$$\therefore \quad \varphi(x)=C \quad x\in(-\infty,+\infty) \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

又 $f(0)=1$, 故 $\varphi(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1\Rightarrow C=1$

从而 $f(x)=e^x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$

(拉练习 3)证明若$f(x)$在$[a, b]$上可微，则至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使 $$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

证(分析)：要证明

$$bf(b)-af(a)=(f(\xi)+\xi f'(\xi))(b-a)$$

与拉格朗日中值定理的式子比较可知，可作辅助函数

$$F(x)=x\,f(x),\quad x\in[a,b].$$

余下的由学生自己完成.

命题证明涉及一个函数及其端点处函数值之差，则考虑利用拉氏定理，其中构造辅助函数是关键。