高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.1 导数及微分

2.1.11 对数求导法

2.1.12 参数方程所确定的函数的导数

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.1 导数及微分

导数及微分

- 2.1.11 对数求导法
  - 对数求导法
  - 对数求导法习例1-5
- 2.1.12 参数方程确定函数的导数
  - 参数方程确定函数的导数
  - 参数方程确定函数的导数习例6-9
- 分段函数的求导法
- 内容小结
- 课堂思考与练习

一、对数求导法

方法: 先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围: 多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

设 $y=u(x)^{v(x)}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解: 首先,两边取对数 $\ln y=v(x)\ln u(x)$,

两边求导 $\dfrac{1}{y}\cdot y'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

$$\therefore y'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

二、对数求导法习例

例1.设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

例2.设 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$, 求y'.

例3.设$y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\ \left(a>0,b>0,\dfrac{a}{b}\neq 1\right)$,求$y'$.

例4.设$y=(x^2+1)^{\sin x}$,求y'.

例5.设$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$,求$y'$.

例1.设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

解: 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

例2.设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解: 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

Back

例3.设$y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\quad(a>0,b>0,\frac{a}{b}\neq 1)$,求$y'$.

解: $$y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\quad(a>0,b>0,\frac{a}{b}\neq 1)$$

两边取对数

$$\ln y=x\ln\frac{a}{b}+a[\ln b-\ln x]+b[\ln x-\ln a]$$

两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$$

$$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)$$

Back

例4.设$y=(x^2+1)^{\sin x}$,求y'.

解: $\because\ \ln y=\sin x\cdot\ln(x^2+1)$,

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}[\sin x\cdot\ln(x^2+1)],$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\cdot\frac{2x}{x^2+1},$$

$$\therefore\ y'=(x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right].$$

Back

例5.设$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$,求$y'$.

解: $\because\ \ln y=\dfrac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\dfrac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]$,

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]\right\},$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{5}\frac{2x}{x^2+2}\right),$$

$$\therefore\ \ y'=\frac{1}{25}\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left(\frac{5}{x-5}-\frac{2x}{x^2+2}\right).$$

Back

三、由参数方程确定的函数的求导法则

1. $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \to \begin{cases} \text{a. } y=f(x) \to \dfrac{dy}{dx}=f'(x) \\ \text{b. } F(x,y)=0 \to \dfrac{dy}{dx}=f'(x) \end{cases}$

2. 问题：消参困难或无法消参时如何求导?

定理：设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定了 y 为 x 的函数,

$x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$,

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

证明: 方法 1. 利用导数的定义.

$\because x=\varphi(t)$ 可导, $\therefore x=\varphi(t)$ 连续.

从而当$\Delta x\to 0$时 $\Delta t\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\Delta t}}{\dfrac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

方法 2. 利用复合函数的求导法则,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

一般来说有如下说明：

若参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数关系, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 可导, 且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$, 则

$\varphi'(t)\neq 0$时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t)\neq 0$时, 有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)

若上述参数方程中$\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$,

则由它确定的函数$y=f(x)$ 可求二阶导数 .

利用新的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\Big/\varphi'(t)$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}=\frac{\boldsymbol{y''x'-x''y'}}{\boldsymbol{x'^3}}$$

四、参数方程所确定的函数的导数习例

例6.设$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

例7. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

例8.设$\begin{cases} t + x - \cos y = 0 \\ x - te^x - 1 = 0 \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例9. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

例6.设$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

解: $\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1+t^2}{4t}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2t\cdot 4t-(1+t^2)4}{16t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^4-1}{8t^3}.$$

Back

例7. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}.$$

Back

例8.设$\begin{cases} t+x-\cos y=0 \\ x-te^{x}-1=0 \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: 因为 x 和 y 都是关于 t 的可微函数, 则

$$\begin{cases} 1+\dfrac{dx}{dt}+\sin y\cdot\dfrac{dy}{dt}=0 \\ \dfrac{dx}{dt}-e^{x}-te^{x}\dfrac{dx}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^{x}}{1-te^{x}}=\frac{e^{x}}{2-x}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{te^{x}-e^{x}-1}{\sin y\cdot(1-te^{x})}=\frac{x-e^{x}-2}{(2-x)\sin y}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{x-e^{x}-2}{e^{x}\sin y}$$

从而 $$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\left(\frac{x-e^{x}-2}{e^{x}\sin y}\right)'$$

$$=\frac{(1-e^{x})e^{x}\sin y-(x-e^{x}-2)\left(e^{x}\sin y+e^{x}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{(e^{x}\sin y)^{2}}$$

$$=\cdots=\frac{(3-x)e^{x}\sin^{2}y-(x-e^{x}-2)^{2}\cos y}{e^{2x}\sin^{3}y}$$

Back

例9. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

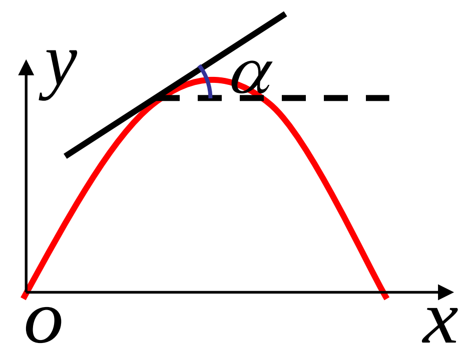
解: 先求速度大小

速度的水平分量为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$,垂直分量为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$,

故抛射体速度大小

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{v_1{}^2 + (v_2 - gt)^2}.$$

再求速度方向 (即轨迹的切线方向):



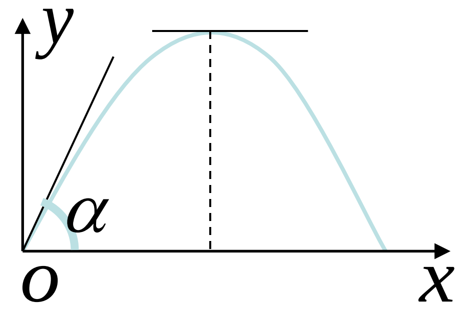
设 α 为切线倾角,则

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_2 - gt}{v_1}.$$

抛射体轨迹的参数方程 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

速度的水平分量 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$，垂直分量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$，

速度的方向 $\tan\alpha = \dfrac{v_2 - gt}{v_1}$



在刚射出 (即 $t = 0$)时, 倾角为

$$\alpha = \arctan\frac{v_2}{v_1}$$

达到最高点的时刻 $t = \dfrac{v_2}{g}$，高度 $y\Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_2^{\,2}}{g}$

落地时刻 $t = \dfrac{2v_2}{g}$，抛射最远距离 $x\Big|_{t=\frac{2v_2}{g}} = \dfrac{2v_1 v_2}{g}$

五、 分段函数的求导法

分段函数求导的不同之处是分段点处的导数必须用定义求.

(1)设 $G(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_0 \\ a & x=x_0 \end{cases}$, 求 $G'(x)$.

解: 当 $x\neq x_0$ 时, $G'(x)=f'(x)$,

当 $x=x_0$ 时, $G'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-a}{x-x_0}$,

注意: $G'(x_0)\neq(a)'$

(2)设 $H(x)=\begin{cases} f(x) & x\leq x_0 \\ g(x) & x>x_0 \end{cases}$, 求 $H'(x)$.

解: 当 $x<x_0$ 时, $H'(x)=f'(x)$

当 $x > x_0$时，$H'(x) = g'(x)$

当 $x = x_0$时，

$$H'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$H'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

若 $H'_-(x_0) = H'_+(x_0)$，则 $H'(x_0)$存在.

若 $H'_-(x_0) \neq H'_+(x_0)$，则 $H'(x_0)$不存在.

注意：$H'_-(x_0) \neq f'(x)\big|_{x=x_0}$ $\quad H'_+(x_0) \neq g'(x)\big|_{x=x_0}$

例10.设$f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，且$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=0$，求$f'(0)$.

解: $\because\ \varphi(0)=0,\varphi'(0)=0,$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x},$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0,$$

故 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

内容小结

对数求导法：对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导：实质上是利用复合函数求导法则.

求高阶导数时,从低到高每次都用参数方程求导公式

求导方法小结

按定义求导

基本初等函数的导数

导数的四则运算法则

复合函数求导法

- 反函数的导数
- 隐函数的求导法
- 参数方程求导法
- 取对数求导法

思考题： 习题2.1第1题（13）到（14）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.1　第27题到第32题

练习参考答案