高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.1 导数及微分

2.1.9 高阶导数
2.1.10 隐函数的求导法则

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.1 导数及微分

导数及微分

2.1.9 高阶导数
- 高阶导数定义与记号
- 简单函数高阶导数的习例1-5
  - 直接法
  - 间接法
- 高阶导数的运算法则
- 高阶导数的运算法则习例6-8

2.1.10 隐函数的求导法则
- 隐函数的求导法则
- 隐函数的求导数习例9-14

内容小结

课堂思考与练习

一、 高阶导数的定义与记号

问题: 变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$，则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore a(t) = v'(t) = [f'(t)]'$.

定义: 若 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 在 x 处可导,这个导数叫做 $y = f(x)$ 的二阶导数.

记为: y'' 或 $f''(x)$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

即 $$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

记号与求导过程: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d(dy)}{dxdx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}.$

类似地，$y=f(x)$的二阶导数的导数叫做三阶导数. 记为

$$f'''(x), y''', \frac{d^3y}{dx^3}.$$

$y=f(x)$的三阶导数的导数叫做四阶导数. 记为

$$f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{d^4y}{dx^4}.$$

$y=f(x)$的n-1阶导数的导数叫做n阶导数.

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

称二阶、三阶…n阶导数为高阶导数.

注意：

(1)相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

(2)高阶导数是在低一阶导数的基础上定义的，故求高阶导数得先求出各低阶导数.

(3)物体运动的加速度，是距离函数关于时间的二阶导数, 即

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=s''(t).$$

说明:

一个函数的导函数不一定再可导，也不一定连续. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数 $f^{(n)}(x)$，且 $f^{(n)}(x)$ 仍是连续的 (此时低于 n 阶的导数均连续)，则称 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶连续可导，记为 $f(x)\in C^n(\mathrm{I})$ 或 $f(x)\in C^n$.

如果 $f(x)$ 在区间 I 上的任意阶的高阶导数均存在且连续，则称函数 $f(x)$ 是无穷次连续可导的，记为

$f(x)\in C^\infty(\mathrm{I})$ 或 $f(x)\in C^\infty$.

二、简单函数高阶导数的习例

1. 直接法

由低阶向高阶逐步求高阶导数.

例1.设$f(x)=x^n$,求各阶导函数.

例2.设 $y=a^x$,求 $y^{(n)}$.

例3.设 $f(x)=\cos x$,求 $f^{(n)}(x)$.

例4　设 $y=\ln(1+x)$,求$y^{(n)}$.

例1.设$f(x)=x^n$,求各阶导函数.

解: $f'(x)=nx^{n-1},\ f''(x)=n(n-1)x^{n-2},$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3},\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k},\cdots$$

$$f^{(n-1)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2x,$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!,$$

$$f^{(n+1)}(x)=0,$$

对于一切$k\geq 1$, $f^{(n+k)}(x)=0$

若 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$,

则 $y^{(n)}=a_0\cdot n!$

练习： 1.$y = (ax+b)^n$ 的高阶导数

解： 当 $1 \le k \le n$ 时

$$y^{(k)} = ((ax+b)^n)^{(k)}$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1)(ax+b)^{n-k} \cdot a^k$$

当$k \ge n+1$时， $y^{(k)} = 0$

Back

例2.设 $y=a^x$,求 $y^{(n)}$.

解:

$$y'=a^x\ln a,$$

$$y''=a^x\ln^2 a,\cdots,$$

$$\therefore y^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

特:$(e^x)^{(n)}=e^x$

注意:

求**n**阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出**n**阶导数.(数学归纳法证明)

Back

例3.设 $f(x)=\cos x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解: $\because\ f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\therefore\ f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=-\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore\ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. 即 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

同理 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Back

例4 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}$ $\quad y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$ $\quad y^{(4)}=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$ $\quad \cdots\cdots$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad (n\geq 1,\ 0!=1)$$

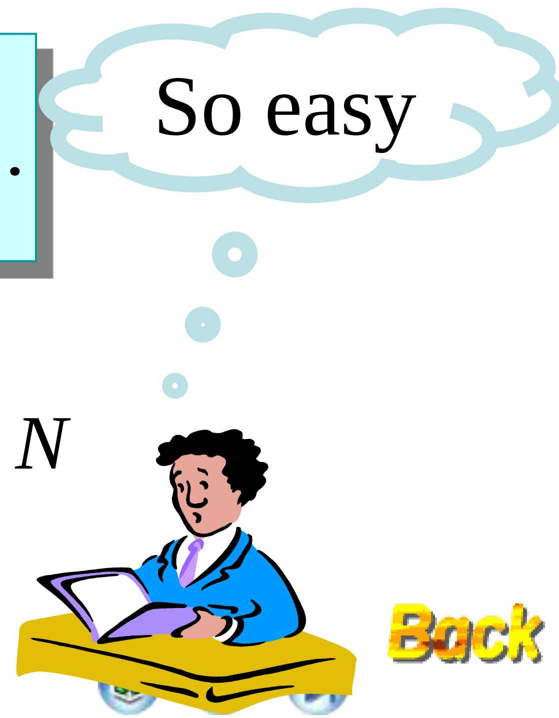
思考: $y=\ln(1-x)$, $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

类似地，有

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}. \qquad n \in N$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n a^n \frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \qquad n \in N$$



Back

2. 间接法

利用已知的高阶导数公式，通过四则运算，变量代换等方法，求出n阶导数.

$$(1)\ (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0) \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2)\ (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(3)\ (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(4)\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

$$(5)\ (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$(5').\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}. \qquad n\in N$$

2. 间接法求高阶导数

例5 设 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, 求$y^{(5)}$.

例6 设 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

例7 求 $\dfrac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}\right)$.

例5 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

利用公式 $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\therefore y^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

Back

例6 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore\ y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

例7 求 $\dfrac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\dfrac{1}{x^2+5x+6}\right)$.

解 由于 $\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$,

故 $$\frac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\frac{1}{x^2+5x+6}\right)=\frac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\frac{1}{x+2}\right)-\frac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=(-1)^{100}\frac{100!}{(x+2)^{101}}-(-1)^{100}\frac{100!}{(x+3)^{101}}$$

$$=100!\left[\frac{1}{(x+2)^{101}}-\frac{1}{(x+3)^{101}}\right]$$

Back

三、 高阶导数的运算法则

定理1: 如果$u=u(x)$, $v=v(x)$都在点x处具有n阶导数, 则

$$(1)[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2)[uv]^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$(3)(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

公式(2)称为Leibniz(莱布尼兹)公式.

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad (uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

注意： 求高阶导数的方法可归纳为三种

方法1(直接法): 即利用高阶导数的定义，再由不完全归纳法得出结论.

方法2(间接法): 即利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

方法3: 即利用高阶导数的运算法则来得结论.

四、高阶导数的运算法则习例

例8 $y = x^2 \cos x$, 求 $y^{(20)}$.

例9 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

例10 设 $y = e^{ax} \sin bx$ (a, b为常数), 求 $y^{(n)}$.

例11 由 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, 求 $\dfrac{d^2 x}{dy^2}$.

例8 $y = x^2 \cos x$, 求 $y^{(20)}$.

解: 设 $u = \cos x, v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 1,2,\cdots,20)$$

$$v' = 2x, v'' = 2, v^{(k)} = 0 \quad (k = 3,4,\cdots,20)$$

$$\therefore\ y^{(20)} = u^{(20)}v + C_{20}^{1}u^{(19)}v' + C_{20}^{2}u^{(18)}v''$$

$$= \cos\left(x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2 + 20\cos\left(x + 19 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2}\cos\left(x + 18 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2$$

$$= x^2 \cos x + 40x\sin x - 380\cos x.$$

例9 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

例10 设 $y=e^{ax}\sin bx$ (a,b为常数), 求$y^{(n)}$.

解 $y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$$=e^{ax}(\underline{a\sin bx+b\cos bx})$$

$$=e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\quad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

$$y''=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[ae^{ax}\sin(bx+\varphi)+be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\sin(bx+n\varphi)\qquad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

例11 由$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$,求$\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解：注意，y', y''是y对x的导数，而$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$是求$x$对$y$的导数.由复合函数及反函数的求导法则，得

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)=-\frac{(y')'_y}{(y')^2}=-\frac{\dfrac{d(y')}{dy}}{(y')^2}$$

$$=-\frac{\dfrac{d(y')}{dx}\dfrac{dx}{dy}}{(y')^2}=-\frac{\dfrac{d(y')}{dx}}{(y')^2\cdot\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{d^2y}\right)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)$$

$$=-\frac{(y')^3\dfrac{dy''}{dy}-y''\dfrac{d(y')^3}{dy}}{(y')^6}=-\frac{(y')^3\dfrac{dy''}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}-y''\dfrac{d(y')^3}{dx}\dfrac{dx}{dy}}{(y')^6}$$

$$=-\frac{(y')^3y'''\cdot\dfrac{1}{y'}-y''\cdot 3(y')^2\cdot y''\cdot\dfrac{1}{y'}}{(y')^6}$$

$$=-\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$

Back

五、隐函数的求导法则

定义:由方程所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Longrightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题: 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

值得注意的是:在求导过程中,若x为自变量,则y是x的函数,关于y的其他形式都是复合函数.

隐函数求导法则:

如果由方程$F(x, y)=0$确定隐函数$y=f(x)$可导，则将$y=f(x)$代入方程中，得到

$$F(x,\ f(x)) \equiv 0$$

对上式两边关于x求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,\ y)=0$$

然后，从这个式子中解出y'，就得到隐函数的导数。

六、隐函数的求导数习例

例12.设方程$e^y+xy-e=0$确定了y为x的可微函数,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例13.设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

例12.设方程$e^y+xy-e=0$确定了y为x的可微函数,求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: 方程两边对x求导得,

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e)=0,$$

$$e^y y'+y+xy'=0.$$

$$\therefore \quad y'=\frac{-y}{x+e^y}.$$

求二阶导数有两个方法:

方法 1.

$$y'' = \left(\frac{-y}{x+e^y}\right)' = \frac{-y'(x+e^y)-(-y)(1+e^y y')}{(x+e^y)^2}$$

$$= \cdots = \frac{2xy+2ye^y-y^2e^y}{(x+e^y)^3}.$$

方法 2. $\because\ e^y y' + y + xy' = 0,$

则 $(e^y y' + y + xy')' = 0,$

$$e^y (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = 0.$$

$$\therefore\ y'' = -\frac{e^y (y')^2 + 2y'}{x+e^y}$$

$$= \cdots = \frac{2xy+2ye^y-y^2e^y}{(x+e^y)^3}$$

Back

例13.设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程, 并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解: 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为$y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x,$ 显然通过原点.

Back

内容小结

1.高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

(4) 利用莱布尼兹公式

2. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导

思考题： 习题2.1第1题（10）到（12）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.1第19题到第22题

练习参考答案

练习题

1. 设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ ，求 $f''(a)$.

解 $\because g(x)$ 可导

$$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

2 已知 $f(x)$ 任意阶可导, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 $n\ge 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ __$n!\,[f(x)]^{n+1}$__

提示: $f''(x)=2f(x)f'(x)=2!\,[f(x)]^3$

$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3!\,[f(x)]^4$$

3. 证明$f(x)$=arcsin$x$满足下式

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0.$$

证： $$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{1-x^2}f'(x)$$

$$\therefore (1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$$

对上式关于*x*求导*n*次：

$$C_n^0(1-x^2)(f''(x))^{(n)}+C_n^1(1-x^2)'(f''(x))^{(n-1)}$$
$$+C_n^2(1-x^2)''(f''(x))^{(n-2)}-C_n^0x(f'(x))^{(n)}$$
$$-C_n^1(x)'(f'(x))^{(n-1)}=0$$

故

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)+n(-2x)f^{(n+1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2!}(-2)f^{(n)}(x)$$
$$-xf^{(n+1)}(x)-n\cdot 1\cdot f^{(n)}(x)=0$$

即

$$(1-x^2)f^{(n+2)}-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$$

4．设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

解：$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)y'=1$

用莱布尼兹公式求 **n** 阶导数

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+n\cdot 2x\,y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$，得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\,y^{(n-1)}(0)\quad(n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$，得 $y''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=0,\ \cdots,\ y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$，得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)$

即 $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$