高等数学A

第2章 一元函数微分学

2.3 导数的应用

2.3.4 曲线的凹性及其判定法　2.3.5 曲线的拐点及其求法
2.3.6 曲线的渐近线　2.3.7 函数图形的描绘方法

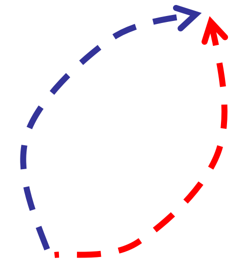
中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

2.3 导数的应用

导数的应用

- **2.3.4 曲线的凹凸性及其判定法**
  - 曲线的凹性及其判定法
  - 曲线的凹凸性习例1-2
- **2.3.5 曲线的拐点及其求法**
  - 曲线的拐点及判别法
  - 曲线的拐点判别习例3-5
- **2.3.6 曲线的渐近线**
  - 曲线的渐近线概念
  - 曲线的渐近线习例6
- **2.3.7 函数图形的描绘方法**
  - 函数图形的描绘方法
  - 函数图形的描绘习例7-10
- 课堂思考与练习

一. 函数图形的凹凸性



$f(x)\uparrow_{(a,\ b)}$ 时，它的图形的形式不尽相同.

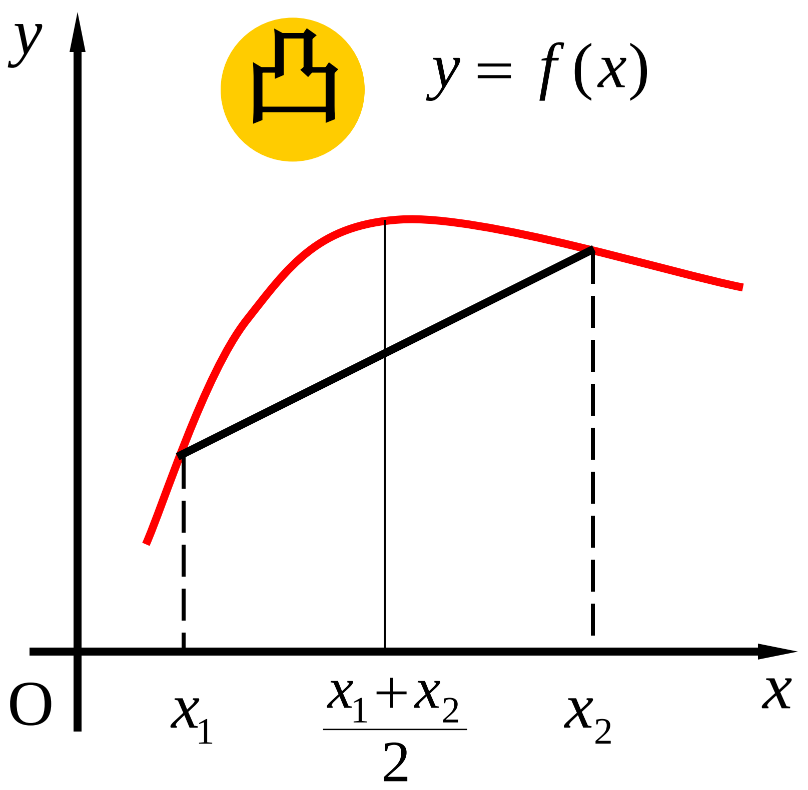
一般说来, 对于一个区间上单调的函数的图形都存在一个需要判别弧段位于相应的弦线的“上方”或“下方”的问题 .

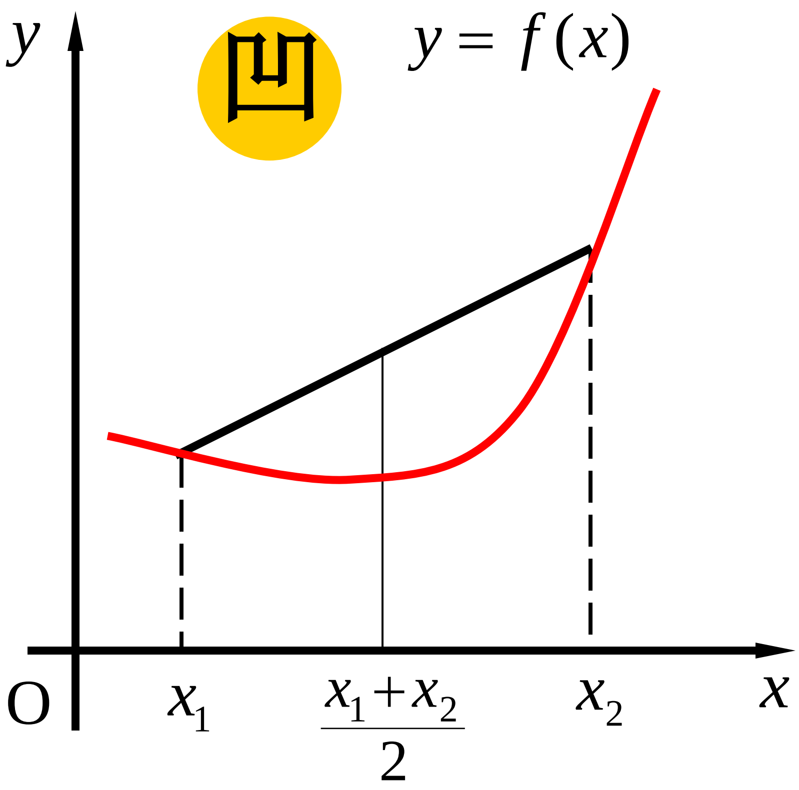
在数学分析中将这种问题称为曲线 (函数)的凹凸性问题 .

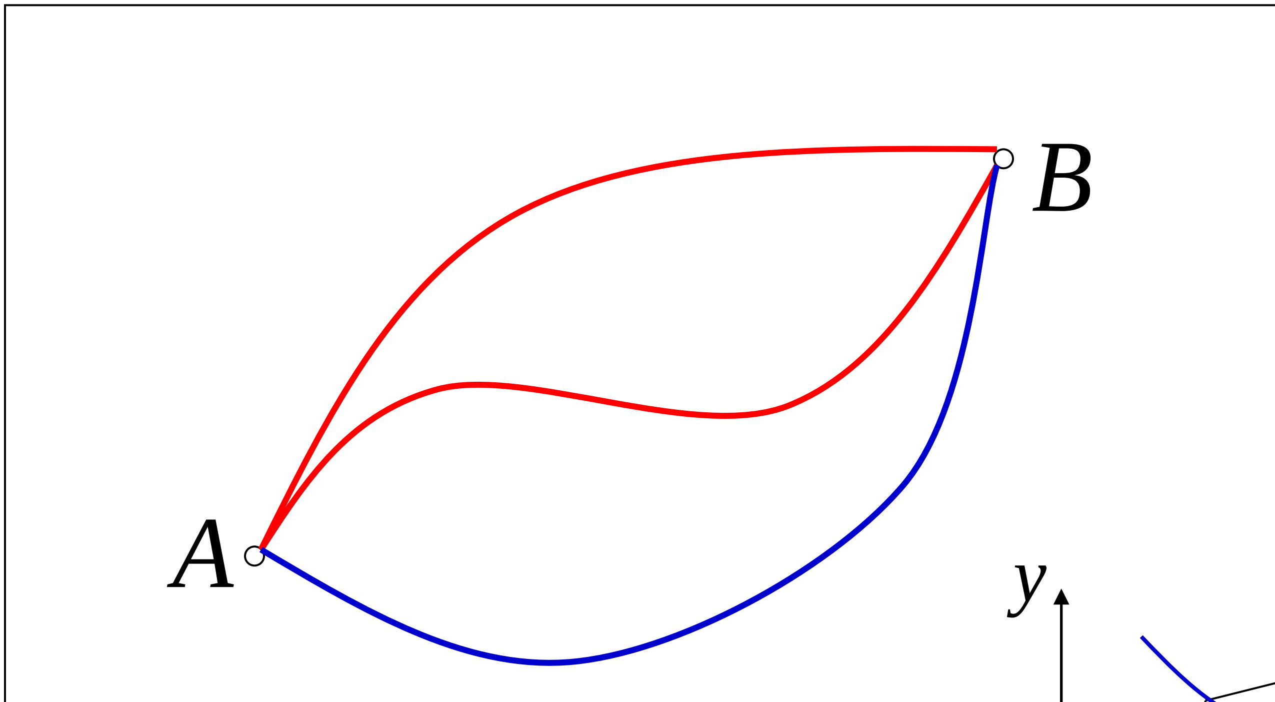
简单地说，在区间 I 上：

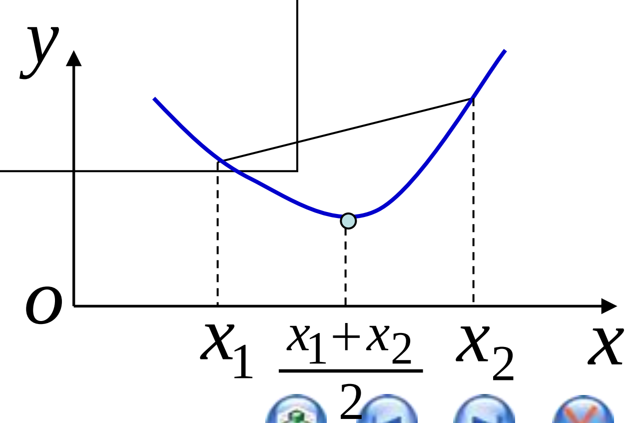
曲线弧段位于相应的弦线上方时，称之为凸的；

曲线弧段位于相应的弦线下方时，称之为凹的.






A
B

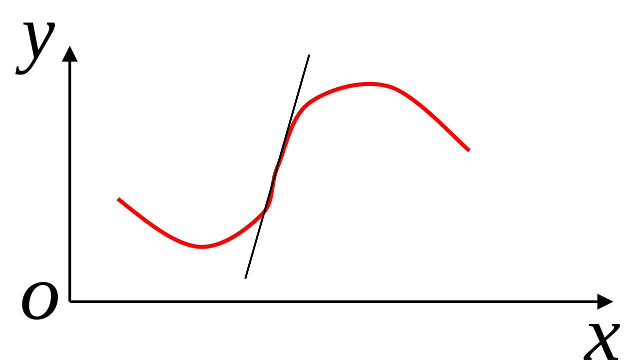

y
o
x
x_1
$\frac{x_1+x_2}{2}$
x_2

定义1 . 设函数$f(x)$在区间 I 上连续 , $\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$的图形是**凹**的;

(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$的图形是**凸**的 .

连续曲线上有切线的凹凸分界点称为**拐点** .



例 分析立方抛物线 $y=x^3$ 的凹凸性.

分析

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3}{8}$$

$$\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))=\frac{x_1^3+x_2^3}{2}$$

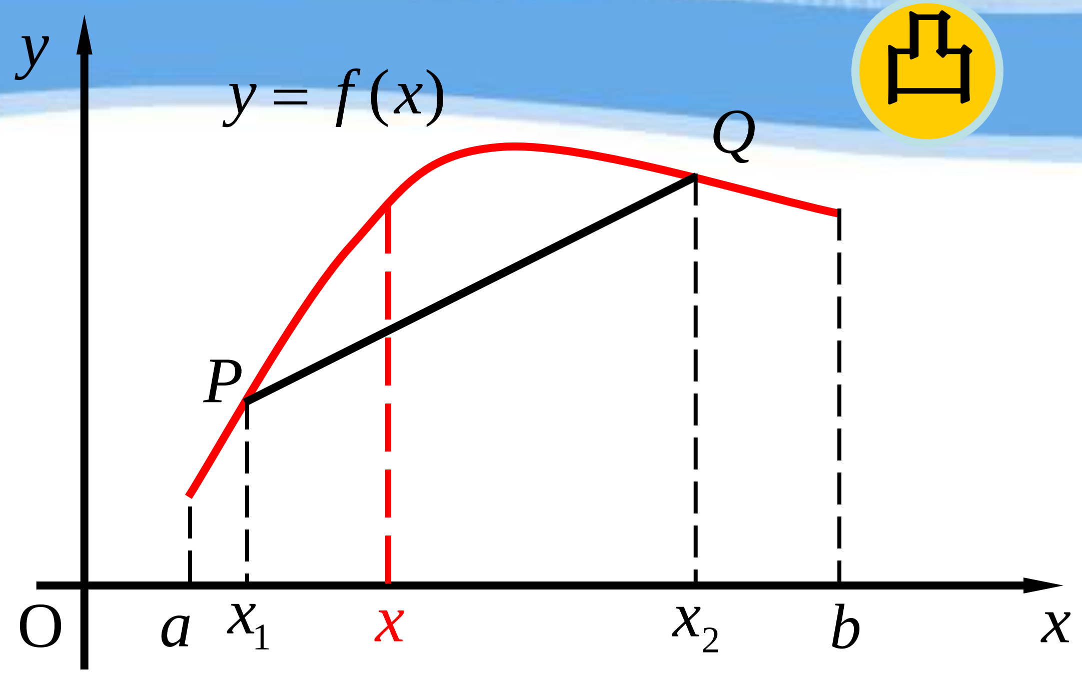
在 $(-\infty,0)$ 上， $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$,

$y=x^3$ 是凸的.

在 $(0,+\infty)$ 上， $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$,

$y=x^3$ 是凹的.

凹凸性的一般性定义是……

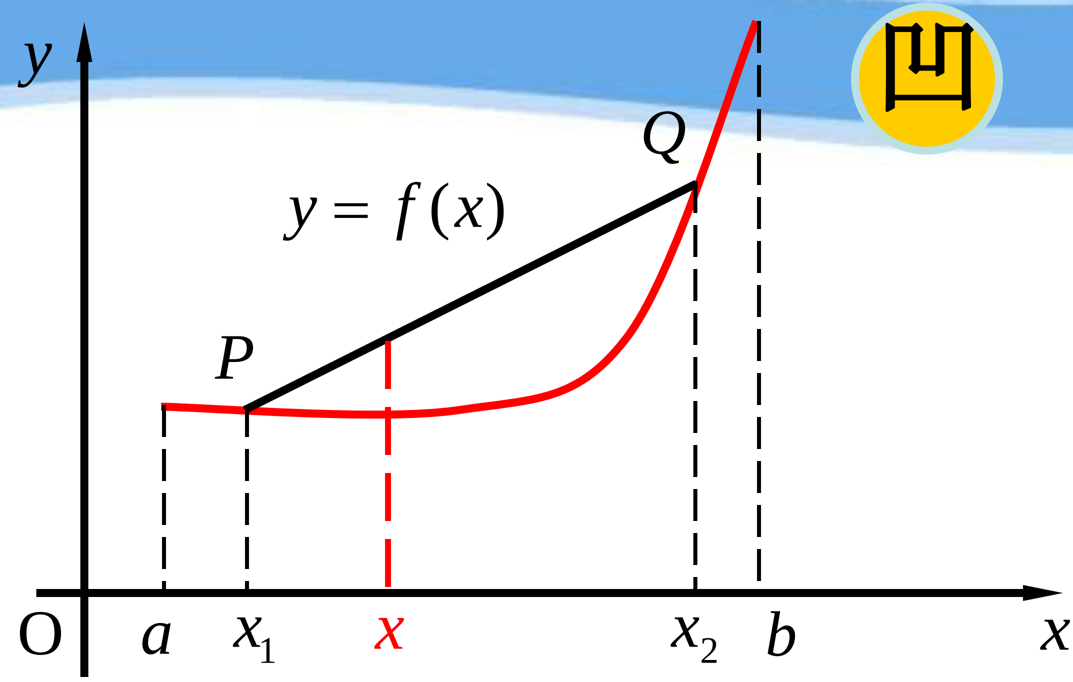


弦线 PQ 的方程： $y_{弦} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_2)$

点 x 的坐标： $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$， $\lambda \in (0, 1)$

曲线位于弦线上方： $f(x) \geq y_{弦}$

即 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$



弦线 PQ 的方程: $y_{弦} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_2)$

点 x 的坐标: $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,\ 1)$

曲线位于弦线下方: $f(x) \le y_{弦}$

即 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

定义2: 设 $f(x)$在 I内连续,

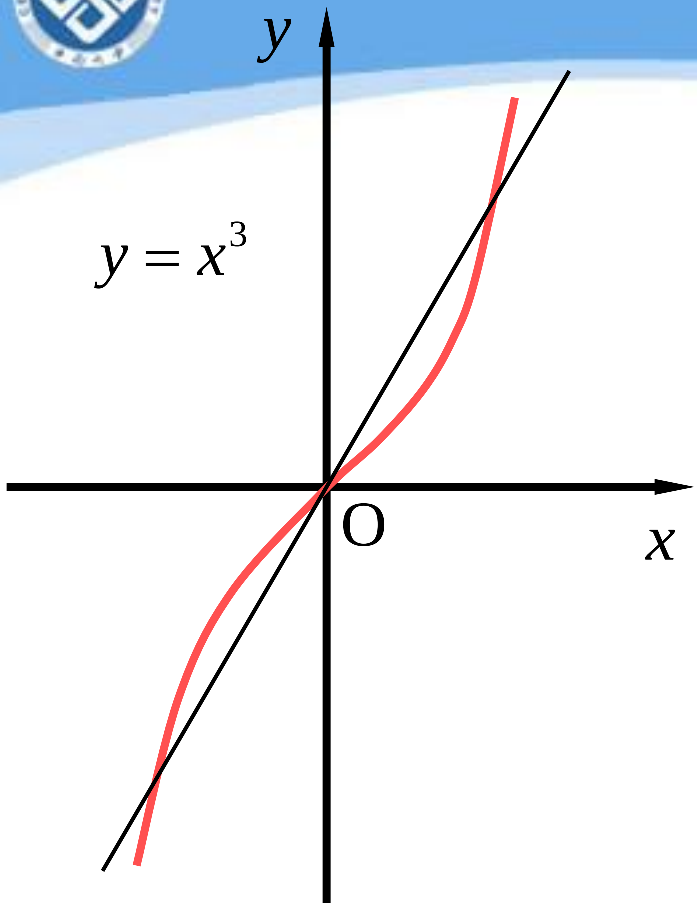
$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \text{且} \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

(1)若$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$,

则 $f(x)$为区间 I上的凸函数.

(2)若$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$,

则 $f(x)$为区间 I上的凹函数.



$$y'=3x^2,\quad y''=6x,$$

有何体会？

在 $(-\infty,\ 0)$ 上，

$y=x^3$ 是凸的，

此时 $y''<0$.

在 $(0,+\infty)$ 上，

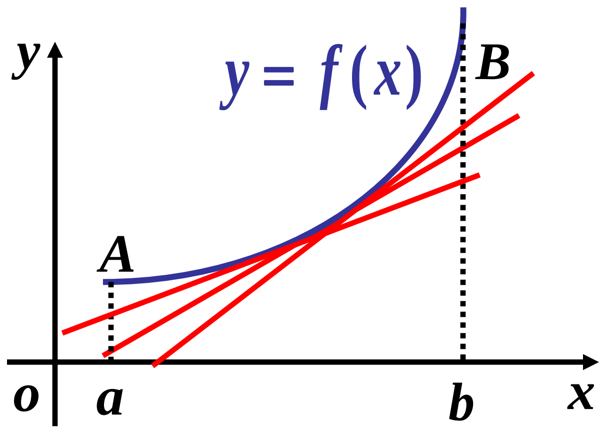
$y=x^3$ 是凹的，

此时 $y''>0$.

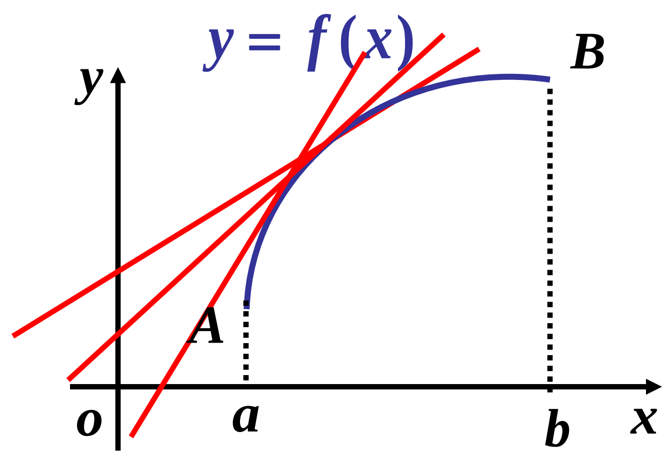
$x=0$ 时，$y''=0$,

点 $(0,\ 0)$ 是曲线凹凸性的分界点.

二、曲线凹凸的判定



$f'(x)$ 递增 $\quad y'' > 0$



$f'(x)$ 递减 $\quad y'' < 0$

定理1. 设$f(x) \in C[a,b]$且在(a,b)内可导.

则曲线 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上为凹的(凸的)充分必要条件是 $f'(x)$在(a, b)内单调增加(减少).

定理2. 设 $f(x)$在(a,b)内有二阶导数,

(1) 若$x \in (a,b)$时有$f''(x) < 0$,

则 $f(x)$在(a,b)内的图形是凸的.

(2) 若$x \in (a,b)$时有$f''(x) > 0$,

则 $f(x)$在(a,b)内的图形是凹的.

在运用该定理时要注意:

如果 $f''(x) \geq 0 \ (\leq 0)$, $x \in (a,b)$,

但仅在个别孤立点处等于零，则定理仍然成立

曲线的凹凸性习例

例1. 判定下列曲线的凹凸性

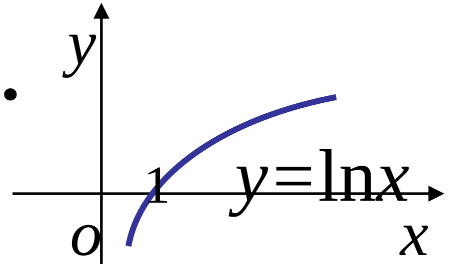
$(1)\ f(x)=\ln x;\quad (2)\ f(x)=\arctan x.$

例2. 证明 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n\ (x>0, y>0, x\neq y, n>1).$

例1. 判定下列曲线的凹凸性

$(1)\ f(x)=\ln x;\quad (2)\ f(x)=\arctan x.$

解: (1) $f(x)=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.



$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0.$$

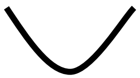
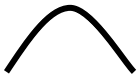
$\therefore f(x)=\ln x$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 上是凸的.

(2) $f(x)=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $f''(x)=0$, 得 $x=0$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

$\therefore f(x)=\arctan x$ 的图形在$(-\infty,0)$上是凹的;

在$(0,+\infty)$上是凸的.

注意到,

点$(0,0)$是曲线

由凸变凹的分界点.

函数凹凸性的应用：证明不等式

定义1中 特别地取 $t=\dfrac{1}{2}$ 则得

$y=f(x)$凹 $\Longleftrightarrow$ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

例2. 证明 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n\ (x>0,y>0,x\neq y,n>1).$

证明: 设 $f(t)=t^n\quad (t>0,n>1).$

$$f'(t)=nt^{n-1},$$

$$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}>0\quad (t>0,n>1)$$

$\therefore f(t)=t^n$ 是凹的.

$$\therefore \frac{f(x)+f(y)}{2}>f(\frac{x+y}{2}).$$

即 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n.$

练习 证明$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$,

其中$x>0, y>0, x\neq y$

证明:令$f(t)=t\ln t,(t>0)$ $f'(t)=\ln t+1, f''(t)=\frac{1}{t}>0$

所以$f(t)=t\ln t$是严格凹的,即

$$f(\frac{x+y}{2})<\frac{f(x)+f(y)}{2},(x>0,y>0)$$

$$\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$$

也就是

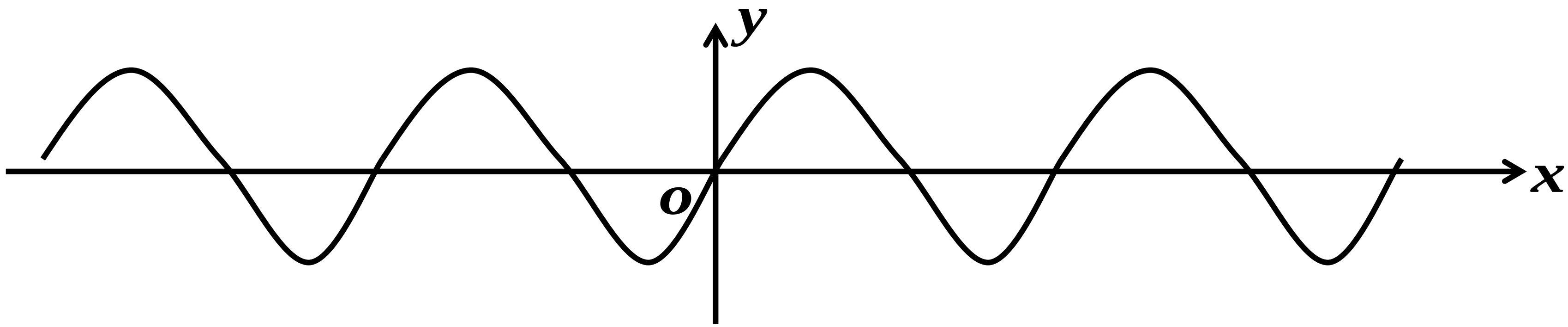
$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$$

二. 函数图形的拐点

定义: 连续曲线$y=f(x)$上凹弧与凸弧的分界点称为拐点.

注意:拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

如$y=\sin x$的拐点有$(k\pi,0), k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.



定理3 (拐点存在的必要条件)

设$f(x)$在包含x_0的区间I上二阶可导,

若$(x_0, f(x_0))$为拐点,则$f''(x_0)=0$.

注意:

设$f''(x)$在$U(\tilde{x}_0,\delta)$内存在,

(1)当$x<x_0$时, $f''(x)>0$;当$x>x_0$时, $f''(x)<0$

则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

或者

(2)当$x<x_0$时, $f''(x)<0$;当$x>x_0$时, $f''(x)>0$

则$(x_0, f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

三. 判定函数图形凹凸与拐点的步骤

(1)写出$f(x)$的定义域.

(2)求$f''(x)$.

(3)求出$f''(x)=0$的点及二阶导数不存在的点x_i.

(4)x_i将定义区间分成若干个小区间.

(5)由$f''(x)$的符号可得凹凸区间;

若在x_i左右两侧, $f''(x)$变号则$(x_i, f(x_i))$为拐点,

否则不是拐点.

曲线的拐点判别习例

例3. 求$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间与拐点.

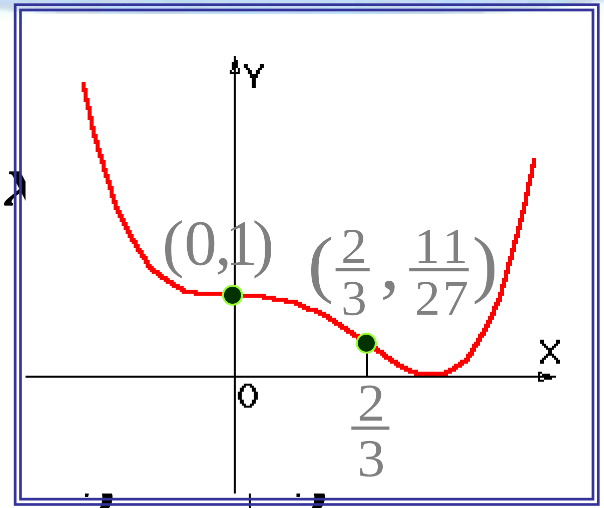
例4. 求$(y-3)^3=x-4$的凹凸区间与拐点.

例5. 问a,b为何值时,$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点?

例3.求$y=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间与拐点.

解: 函数y的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$\because\ y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x^2-24x$



令 $y''=0$, 得 $x_1=0,\ x_2=\dfrac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	拐点	$\frown$	拐点	$\smile$

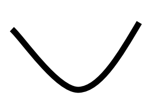
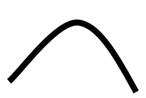
$\therefore (0,1)$和$(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27})$是拐点.

例4. 求$(y-3)^3 = x-4$的凹凸区间与拐点.

解: $\because\ y = 3 + \sqrt[3]{x-4}$, 其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}},\quad y'' = -\frac{2}{9(x-4)\sqrt[3]{(x-4)^2}}.$$

没有二阶导数为0的点, 但$x=4$为不可导点.

x	$(-\infty,4)$	4	$(4,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y		拐点	

$\therefore (4,3)$ 是拐点.

例5. 问a,b为何值时,(1,3)为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点?

解: $y'=3ax^2+2bx,\quad y''=6ax+2b.$

又(1,3)是$y=ax^3+bx^2$的拐点.

$$\therefore \begin{cases} y(1)=3 \\ y''(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$$

$$\therefore a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}.$$

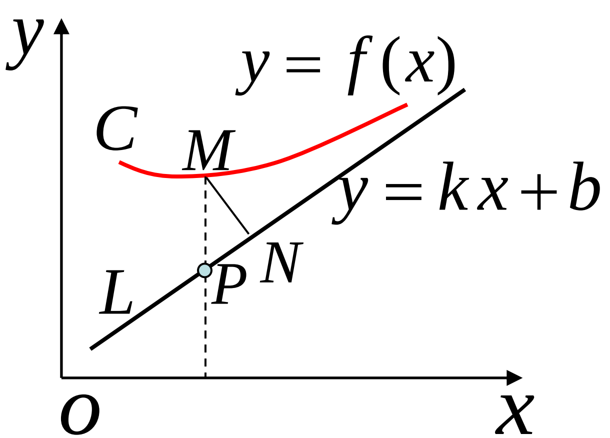
现在我们还不能很好地作出函数的图形，因为还不知道如何求曲线的渐近线．

利用极限

四、 曲线的渐近线

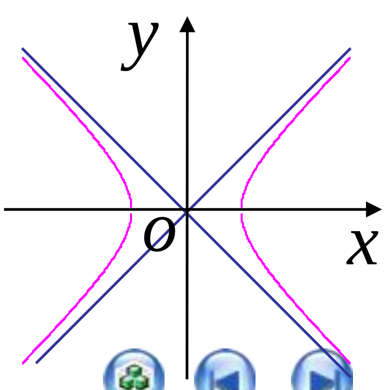
定义. 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**.

或为“**纵坐标差**”

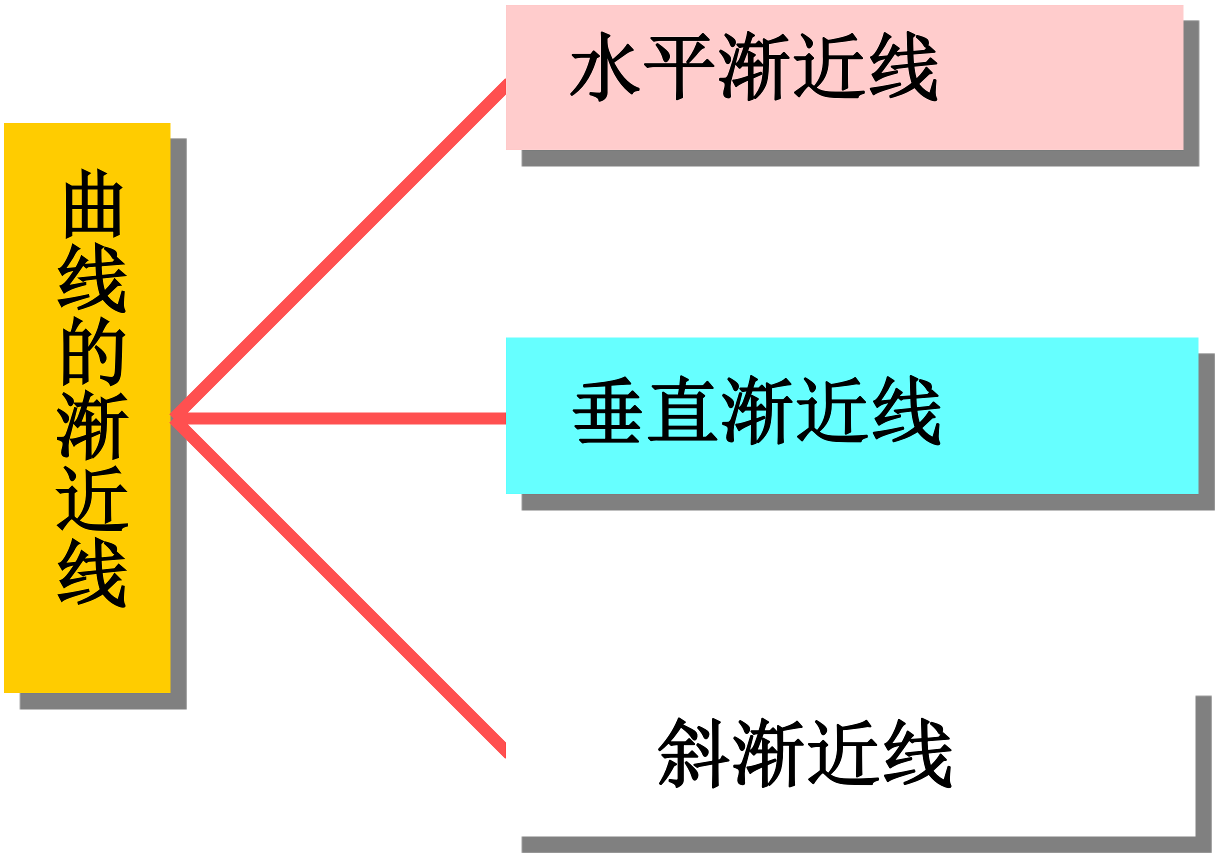


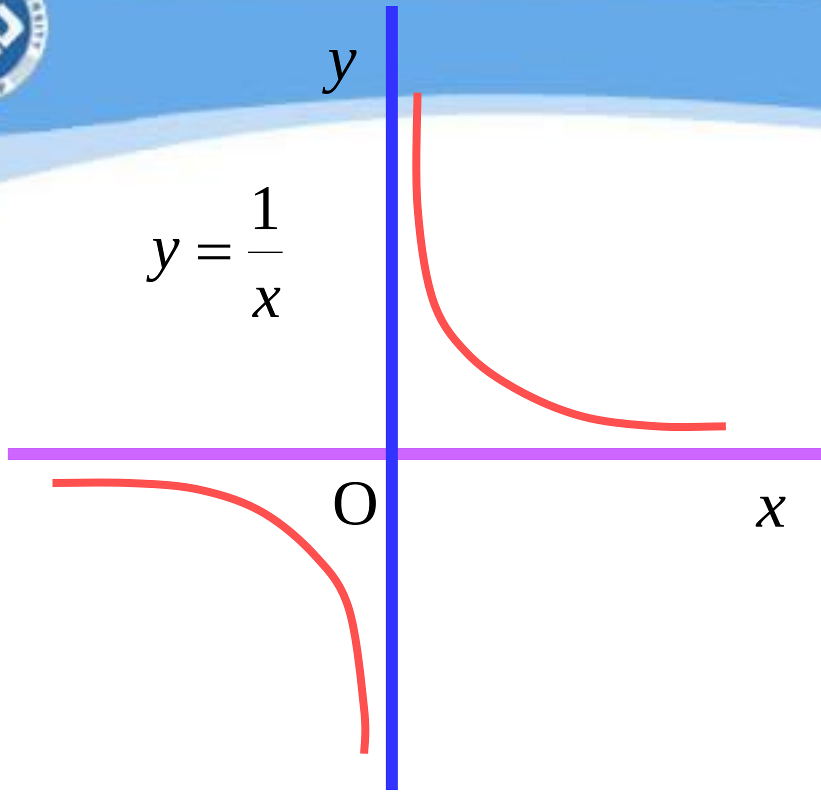
例如，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线.

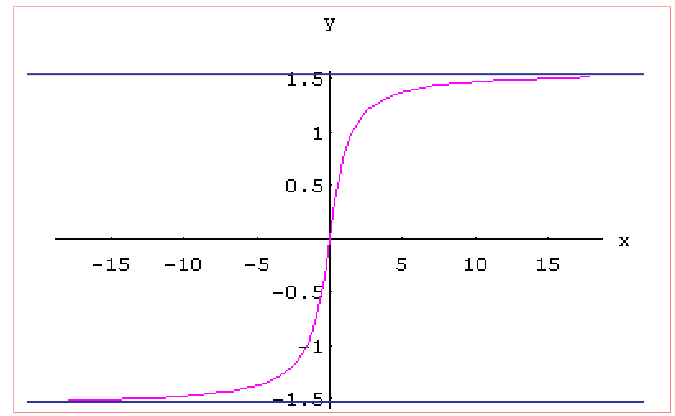

曲线的渐近线
水平渐近线
垂直渐近线
斜渐近线



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \text{水平渐近线}\ y=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\quad \text{垂直渐近线}\ x=0.$$

例如 $y=\arctan x$,



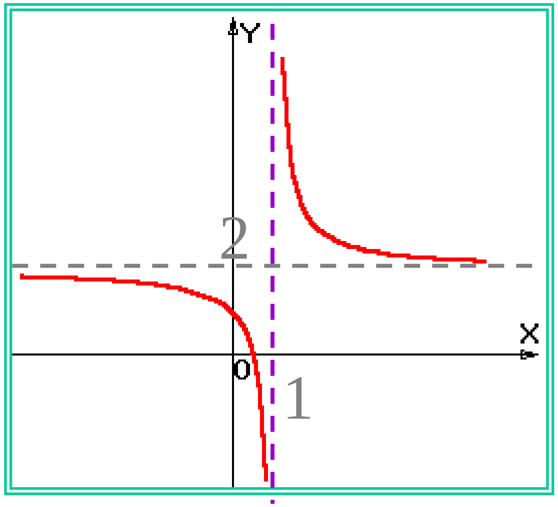
有水平渐近线两条:

$$y=\frac{\pi}{2},\qquad y=-\frac{\pi}{2}.$$

水平与铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.
(或$x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.
(或$x\to x_0^-$)



例6. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .

解: $\because\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

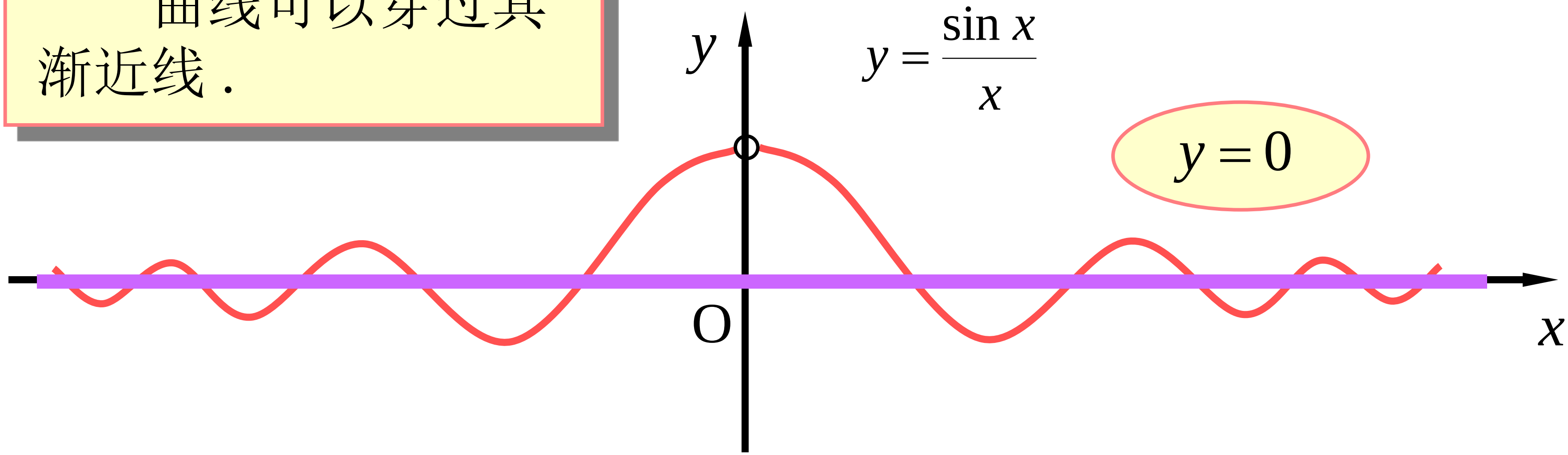
$\because\ \lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore\ x=1$为垂直渐近线.

例7 求曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线.

解 $\because \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0,$

$\therefore \quad y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线.

曲线可以穿过其渐近线.



2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

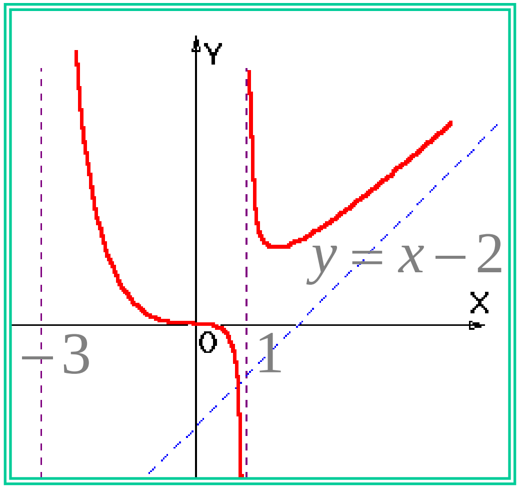
$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

曲线的渐近线习例

例8. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$,

$$\therefore \lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to -3} y=\lim_{x\to -3}\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}=\infty,$$

故有铅直渐近线 $x=1$ 与 $x=-3$.

又 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)x}=1,$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2,$$

$\therefore$有斜渐近线$y=x-2.$

注意: 如果

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ 不存在,

可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线.

例9 求 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 的渐近线.

解 $D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty,$$

$\therefore x = 1$ 是曲线的铅直渐近线

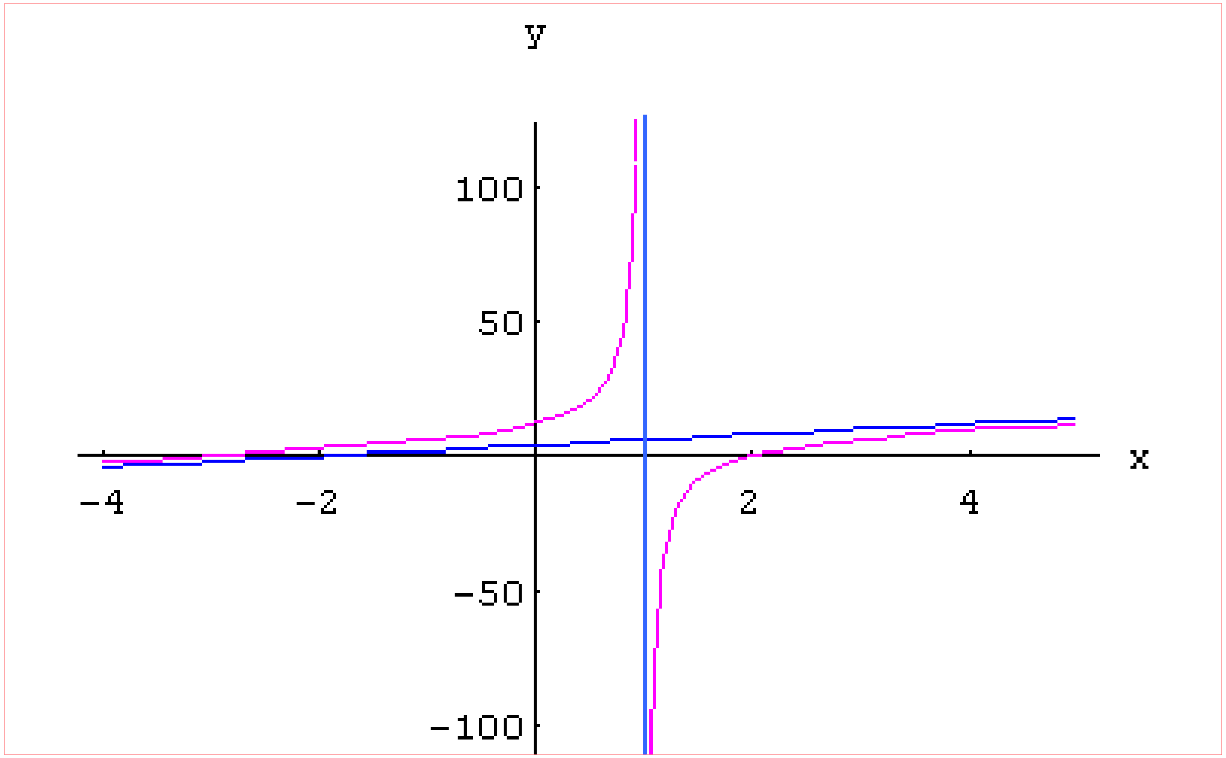
$$\text{又}\because \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-2)(x+3) - 2x(x-1)}{x-1} = 4,$$

$\therefore y = 2x + 4$ 是曲线的一条斜渐近线.

$$f(x)=\frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$$ 的两条渐近线如图



五. 函数图形的描绘

利用函数特性描绘函数图形, 一般步骤如下:

(1) 确定函数 $f(x)$的定义域.

(2) 求得 $f'(x)=0$, $f''(x)=0$的点.

(3) 以间断点,不可导点, $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$的点把定义域分成若干个小区间.

(4) 在各小区间上确定$f'(x)$, $f''(x)$的符号,从而确定出图形的升降,凹凸,极值与拐点.

(5) 求出极值,拐点与坐标轴的交点.

(6) 求出渐近线.

(7) 描图.

函数图形的描绘习例

例9. 设 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$,描绘图形.

例10. 设 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$,描绘图形.

例11. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

例12. 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的图形.

例9. 设 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, 描绘图形.

解: (1)函数y的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, 令$y'=0$, 得$x=\pm1$.

$y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, 令$y''=0$, 得$x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$.

(3)列表讨论如下:

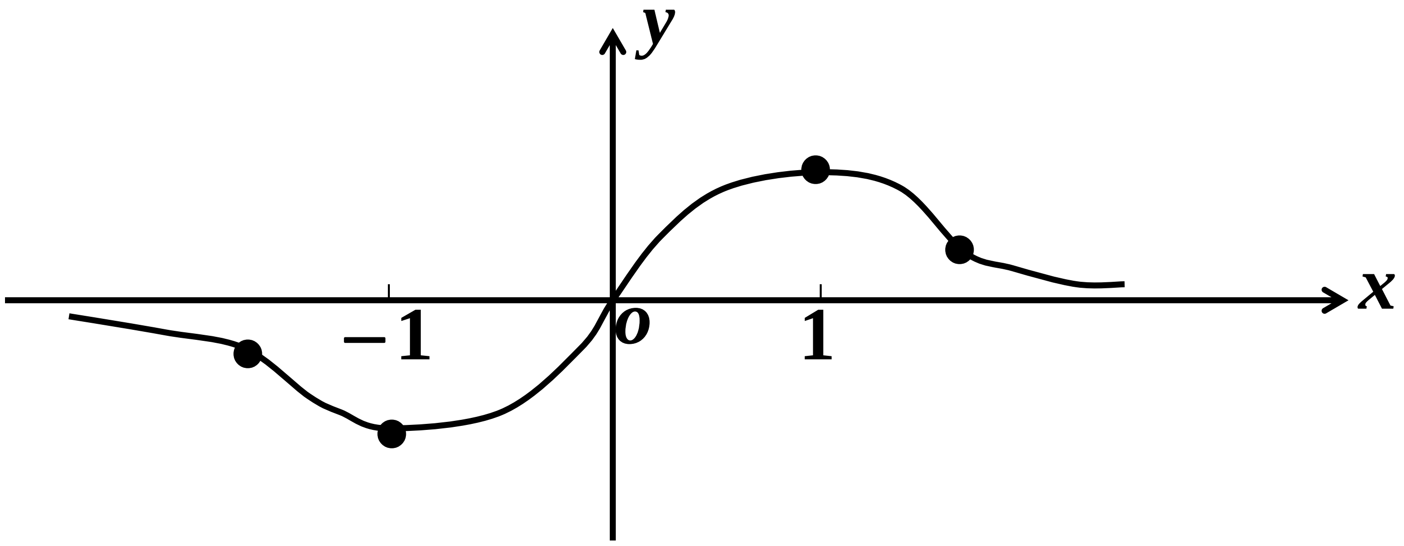
x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow\frown$		$\searrow\smile$		$\nearrow\smile$		$\nearrow\frown$		$\searrow\frown$		$\searrow\smile$

(4)极大值为 $y(1)=\dfrac{1}{2}$,极小值为 $y(-1)=-\dfrac{1}{2}$,

拐点有 $(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}),(0,0),(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$.

(5) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0,\quad \therefore y=0$ 为水平渐近线.

(6) 描图如下:



例10. 设 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$，描绘图形.

解: (1)函数y的定义域为$(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

(2) $y'=\dfrac{36(3-x)}{(x+3)^3}$，　　令$y'=0$，得 $x=3$.

$y''=\dfrac{72(x-6)}{(x+3)^4}$，　　令$y''=0$，得 $x=6$.

(3)列表讨论如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
y'	$-$	不存在	$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	不存在	$-$		$-$	0	$+$
y	↘ ∩		↗ ∩		↘ ∩		↘ ∪

(4)极大值为$y(3)=4$,

拐点有$(6,\dfrac{11}{3})$.

与坐标轴的交点:$(-6\pm3\sqrt{3},0),(0,1)$.

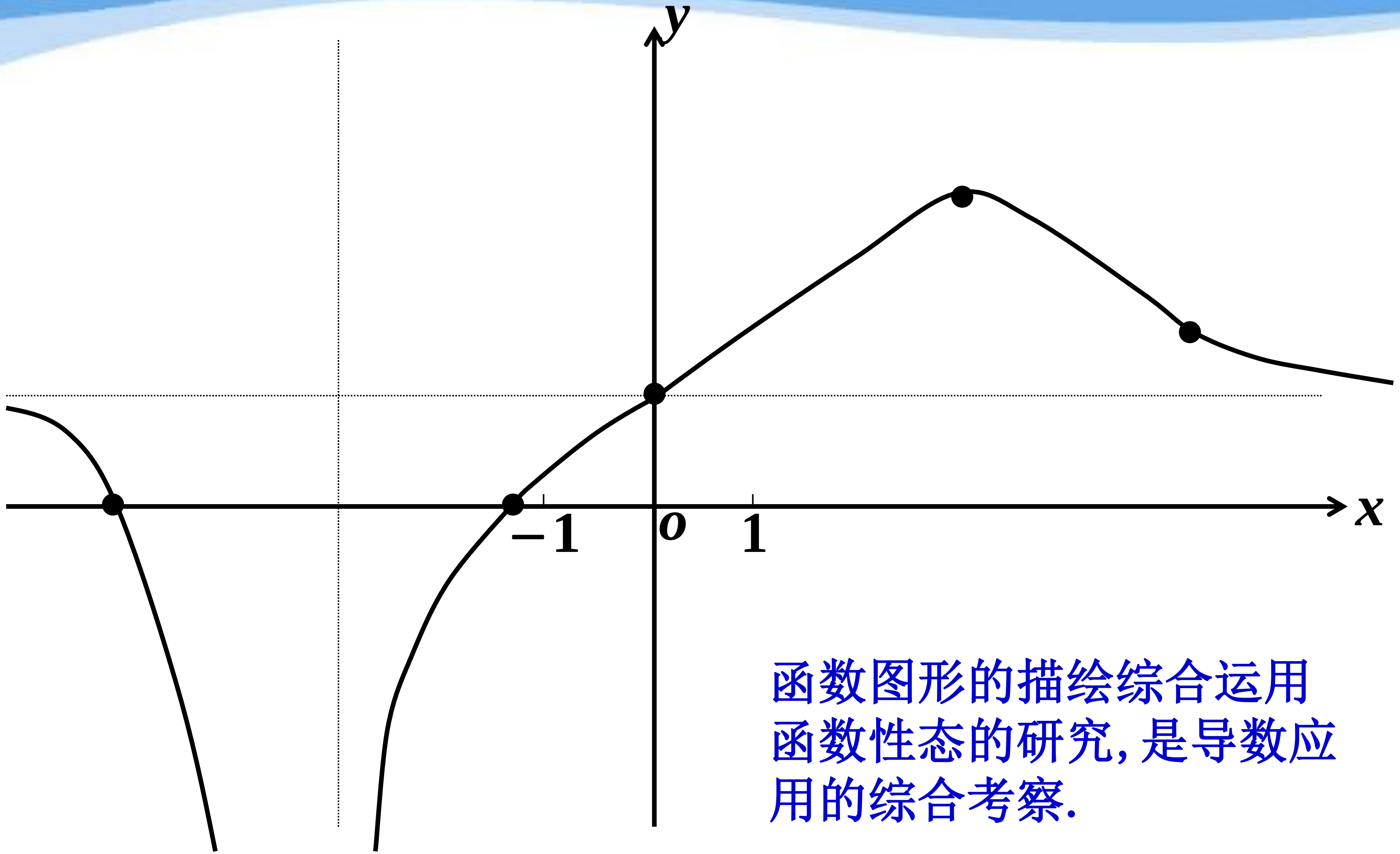
(5) $\because \lim\limits_{x\to\infty}[1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}]=1$,

$\therefore y=1$是水平渐近线.

$\because \lim\limits_{x\to-3}[1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}]=\infty$,

$\therefore x=-3$是铅直渐近线.

(6) 描图如下:



函数图形的描绘综合运用函数性态的研究，是导数应用的综合考察.

例12. 描绘方程$(x-3)^2+4y-4xy=0$的图形.

解: (1)$y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$

(2) 求关键点

$$\because \quad 2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$$

$$\therefore \quad y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$\because \quad 2+4y''-8y'-4xy''=0$$

$$\therefore \quad y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y'=0$得 $x=-1,3$;

(3) 判别曲线形态

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y		-2				0	
		(极大)				(极小)	

(4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 1} y = \infty,\quad \therefore x = 1$ 为铅直渐近线

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y' = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{4}$, 即 $k=\dfrac{1}{4}$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

(5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

(6) 绘图

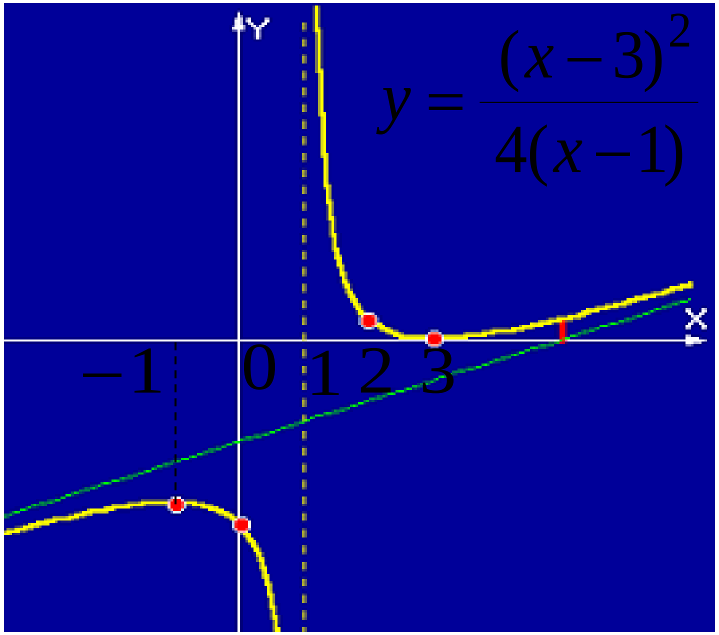
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	↗	-2 (极大)	↘	无定义	↘	0 (极小)	↗

铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{1}{4}$



例12. 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 y 轴.

(2) 求关键点 $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$

(3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	

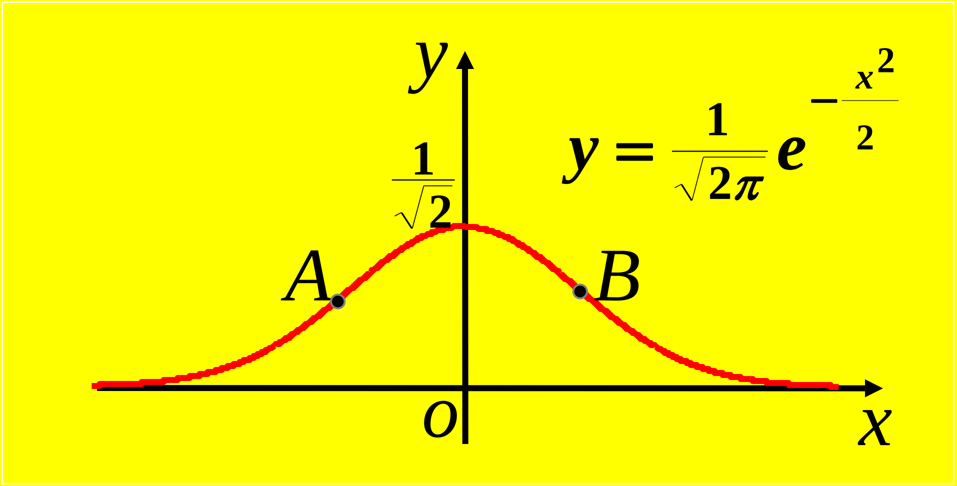
(极大)　　(拐点)

(4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y = 0$ 为水平渐近线

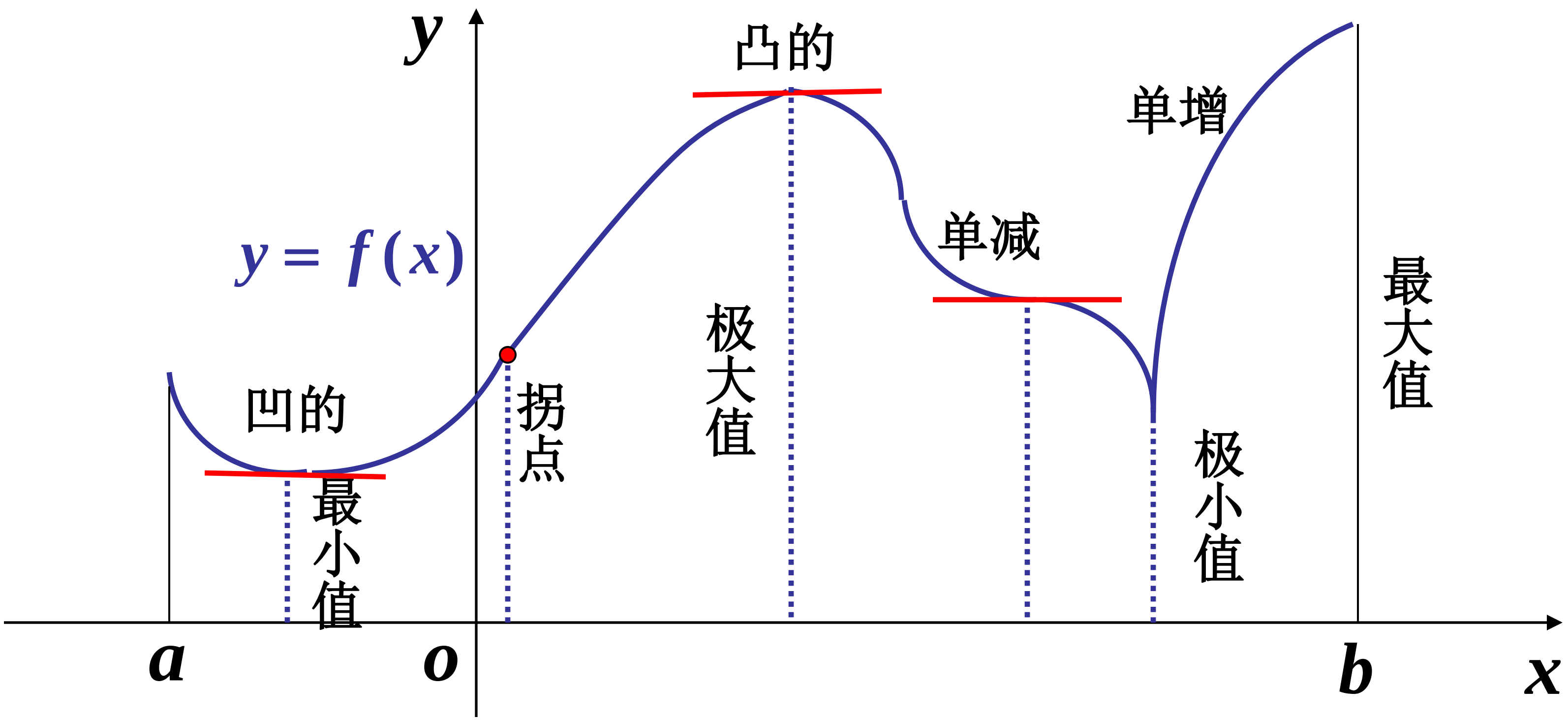
(5) 作图



- Mathematica
- Matlab
- Maple
- MathCAD

四、小结

函数图形的描绘综合运用函数性态的研究,是导数应用的综合考察.



思考题： 习题2.3 第1题（1）到（2）

思考题参考答案

课堂练习： 习题2.3 第24题到第27题

练习参考答案