同济大学

高等代数与解析几何

教师： 蒋志洪

理学院数学系

第十章双线性函数与二次型

§10.1 双线性函数与二次型

定义. 设V是数域$\mathbb{F}$上的线性空间, $f: V\times V \longrightarrow \mathbb{F}$是一个映射, 即对于任意的$\alpha,\beta\in V$, 都唯一确定一个数$f(\alpha,\beta)\in\mathbb{F}$. 如果对任意$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2\in V$以及$k\in\mathbb{F}$, f满足:

(1)$f(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)$

(2)$f(\alpha,\beta_1+\beta_2)=f(\alpha,\beta_1)+f(\alpha,\beta_2)$

(3)$f(k\alpha,\beta)=f(\alpha,k\beta)=kf(\alpha,\beta)$

则称f为V上的一个双线性函数

条件(1), (3)说明$f(\alpha,\beta)$关于第一个变量α是线性的, 而条件(2), (3)则说明$f(\alpha,\beta)$ 关于第二个变量β是线性的. 因此, 如果将双线性函数$f(\alpha,\beta)$其中的一个变量固定, 比如第一个变量α固定, 则$f(\alpha,\quad): V\longrightarrow\mathbb{F}$是$V$上的一个线性函数.

例. 设V为欧氏空间，则V上的内积一个双线性函数. 特别，如果$V = \mathbb{R}^2$，$\alpha = (x_1, x_2)^t, \beta = (y_1, y_2)^t \in V$, 则
$$f(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2$$
是V上的一个双线性函数.

例. 设$V = \mathbb{F}^2$，$\alpha = (x_1, x_2)^t, \beta = (y_1, y_2)^t \in V$, 则
$$f(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$
也是V上的一个双线性函数.

例. 对$A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 则$f(A, B) = Tr(AB)$是$M_n(\mathbb{F})$上的一个双线性函数.

例. 设$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$是数域$\mathbb{F}$上的一个$n$阶方阵, $V = \mathbb{F}^n$. 对于任意的$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t \in V$, 定义

$$f(X,Y) = X^t AY = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

则f是V上的一个双线性函数.

定义. 设f是V上的一个双线性函数, 如果对任意$\alpha,\beta\in V$，f满足:

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

则称f为V上的一个对称双线性函数

如果对任意$\alpha,\beta\in V$，f满足:

$$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$$

则称f为V上的一个反对称双线性函数

例. 设$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$是数域$\mathbb{F}$上的一个$n$阶方阵, $V=\mathbb{F}^n$. 对于任意的$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^t$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^t\in V$, 定义

$$f(X,Y)=X^tAY=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

则当A是对称矩阵时, f为V上的一个对称双线性函数, 则当A是反对称矩阵时, f为V上的一个反对称双线性函数,

定义. 设f是V上的一个双线性函数, $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为的$V$一个有序基, 称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\alpha_1,\alpha_1) & f(\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_1,\alpha_n) \\ f(\alpha_2,\alpha_1) & f(\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_2,\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\alpha_n,\alpha_1) & f(\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

为双线性函数f在有序基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下的矩阵.

例. 设$V=\mathbb{R}^2$, V上的一个双线性函数f为:

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1 \text{ 其中} \alpha=(x_1,x_2)^t, \beta=(y_1,y_2)^t\in V$$

求f在V的标准基$(\mathbf{e}_1=(1,0)^t,\mathbf{e}_2=(0,1)^t)$下的矩阵.

解. 由于$f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=1, f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=-1, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=-1, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=1$, 所以$f$在基$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

命题. 设f为V上的一个双线性函数，$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为的$V$一个有序基，$f$在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下的矩阵为$A$，如果$\alpha,\beta \in V$在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下的坐标为$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n), Y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，则

$$f(\alpha,\beta)=XAY^t$$

证明. 由于$\alpha=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \beta=\sum_{i=1}^n y_j\alpha_j$，所以

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta) &= f(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j\alpha_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(\alpha_i,\alpha_j) \\ &= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} f(\alpha_1,\alpha_1) & f(\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_1,\alpha_n) \\ f(\alpha_2,\alpha_1) & f(\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_2,\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\alpha_n,\alpha_1) & f(\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=XAY^t. \end{aligned}$$

说明. (1) 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为的$V$一个有序基, 对于$V$上的一个双线性函数$f$, 则$f$在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下有一个矩阵$A$与之对应.

反之给定一个矩阵为A, 对于$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_j\alpha_j\in V$, 定义

$$f(\alpha,\beta)=XAY^t,\ (\text{这里}X=(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n),Y=(y_1,\,y_2,\,\cdots,\,y_n))$$

则f是V上的一个双线性函数f, 并且f在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下矩阵正好为$A$. 所以$V$上的双线性函数$f$与矩阵是一一对应的.

(2) 设f为V上的一个双线性函数, $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为的$V$一个有序基, f在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下的矩阵为$A$, 则$f$是对称双线性函数充要条件$A$是对称矩阵; f反对称双线性函数充要条件A是反对称矩阵.

定义. A与B是两个n阶方阵, 如果存在可逆阵P, 使得$B = P^t AP$, 则称A与B是合同的.

说明. 矩阵间的合同关系是一个等价关系, 满足:

(1) 自反性 $A = E^t AE$

(2) 对称性 由$B = P^t AP$, 得$A = (P^{-1})^t BP^{-1}$

(3) 传递性 由$B = P_1^t AP_1, C = P_2^t BP_2$ 得$C = (P_1P_2)^t A(P_1P_2)$.

命题. 线性空间V上一个双线性函数f在V的不同有序基下的矩阵是合同的.

证明. 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$和$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$为$V$的两个基. f在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$下的矩阵为$A$, f在基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$下的矩阵为$B$, 基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$到基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的过渡矩阵为$P$, 即$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$. 记$\alpha,\beta$在基$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的坐标分别为$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n), Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则$\alpha,\beta$在基$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$下的坐标分别为$X^t = PX_1^t, Y^t = PY_1^t$, 于是

$$f(\alpha,\beta) = XAY^t = X_1P^tAPY_1^t$$

另一方面

$$f(\alpha,\beta) = X_1BY_1^t$$

由于双线性函数与矩阵是一一对应的, 所以$B = P^tAP$.

定义. 设f是数域$\mathbb{F}$上线性空间V上的一个对称双线性函数, 对任意的$\alpha \in V$, 定义: $f'(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$, 则$f' : V \to \mathbb{F}$是一个函数, 称$f'$为与$f$关联的二次函数.

说明. (1) 一个对称双线性函数完全由与其关联的二次函数所确定. 这是因为:

$$f'(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + 2f(\alpha, \beta) + f(\beta, \beta),$$

$$f'(\alpha - \beta) = f(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = f(\alpha, \alpha) - 2f(\alpha, \beta) + f(\beta, \beta),$$

二式相减, 得:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}[f'(\alpha + \beta) - f'(\alpha - \beta)].$$

(2) 设f为V上的对称双线性函数, f'为与其关联的二次函数, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V$ 的一组基, f在此基下的矩阵为$A=(a_{ij})$ ($A=A^t$为对称矩阵). 对任意的$\alpha\in V$, 设它在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为: $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则

$$f'(\alpha,\alpha)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j.$$

所以$f'(\alpha,\alpha)$为关于变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式.

练习. 习题10.1:1,2,4.