第二学期总复习

向量代数与空间解析几何

- （一）向量代数
- （二）空间解析几何

（一）向量代数

1、向量的概念

设 $\vec{a}=\{x,y,z\}=xi+yj+zk$

模：$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

单位向量：$\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

2、向量的运算

设 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$ $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$

加法: $\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\}$

数乘: $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$

点乘: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

叉乘: 模: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

方向:垂直于 $\vec{a}$, $\vec{b}$,并且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ 成右手系

坐标表示: $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

几何意义:

$|\vec{a}\times\vec{b}|$ 表示以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的 面积。

混合积： $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

几何意义：

$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$表示以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为棱的平行六面体的体 积。

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right),\quad \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$$

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

$$\vec{a}//\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=0 \iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\text{ 共面} \iff \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$$

（二）空间解析几何

1、平面

[1] 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

[2] 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

[3] 平面的截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

2、空间直线

[1] 一般方程 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

[2] 对称式方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

[3] 参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

3、过直线的平面束

过直线 $L:\begin{cases}\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

的平面束方程为:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

注意：不包括 π_2 这个平面.

4、距离

两点间距离公式:

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

点到平面距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到直线的距离公式

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L: \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$

的距离为 $$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$$

异面直线之间的距离公式

已知两直线 L_1 : 过点 P_1 , 方向向量为 v_1 ;

L_2 : 过点 P_2 , 方向向量为 v_2 ;

则 L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)=0$

L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)\neq 0$

若 L_1 与 L_2 异面，则它们之间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}$$

5、夹角

两向量之间的夹角 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

两平面之间的夹角 $\cos\langle\Pi_1,\Pi_2\rangle = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ $\Pi_1:\vec{n}_1$ $\Pi_2:\vec{n}_2$

两直线之间的夹角 $\cos\langle L_1,L_2\rangle = \dfrac{|\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1||v_2|}$ $L_1:\vec{v}_1$ $L_2:\vec{v}_2$

直线与平面之间的夹角 $\sin\langle L,\Pi\rangle = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$ $L:\vec{v}$ $\Pi:\vec{n}$

6、二次曲面

[1] 柱面

母线平行于z轴，准线为：$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 的柱面方程为：$F(x,y)=0$

[2] 旋转曲面

曲线 $L:\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为：$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

[3] 二次曲面

（1）球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

（2）椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

（5）椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

（6）双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

（7）二次锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

7、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量 z 后得：

$H(x,y)=0$ —— 曲线关于 xoy 的投影柱面

空间曲线在 xoy 面上的投影曲线 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

多元函数微分学

- （一）极限与连续
- （二）偏导数和全微分
- （三）方向导数和梯度
- （四）极值
- （五）几何应用

（一）极限定义的说明

1、$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$存在是指：$(x,y)$沿任何路径趋于$(x_0,y_0)$时，函数的极限都存在。

2、求二元函数极限的方法：

（1）利用定义及性质（夹逼准则；无穷小量乘有界变量仍为无穷小量）；

（2）利用一元函数的两个特殊极限及等价无穷小代换；

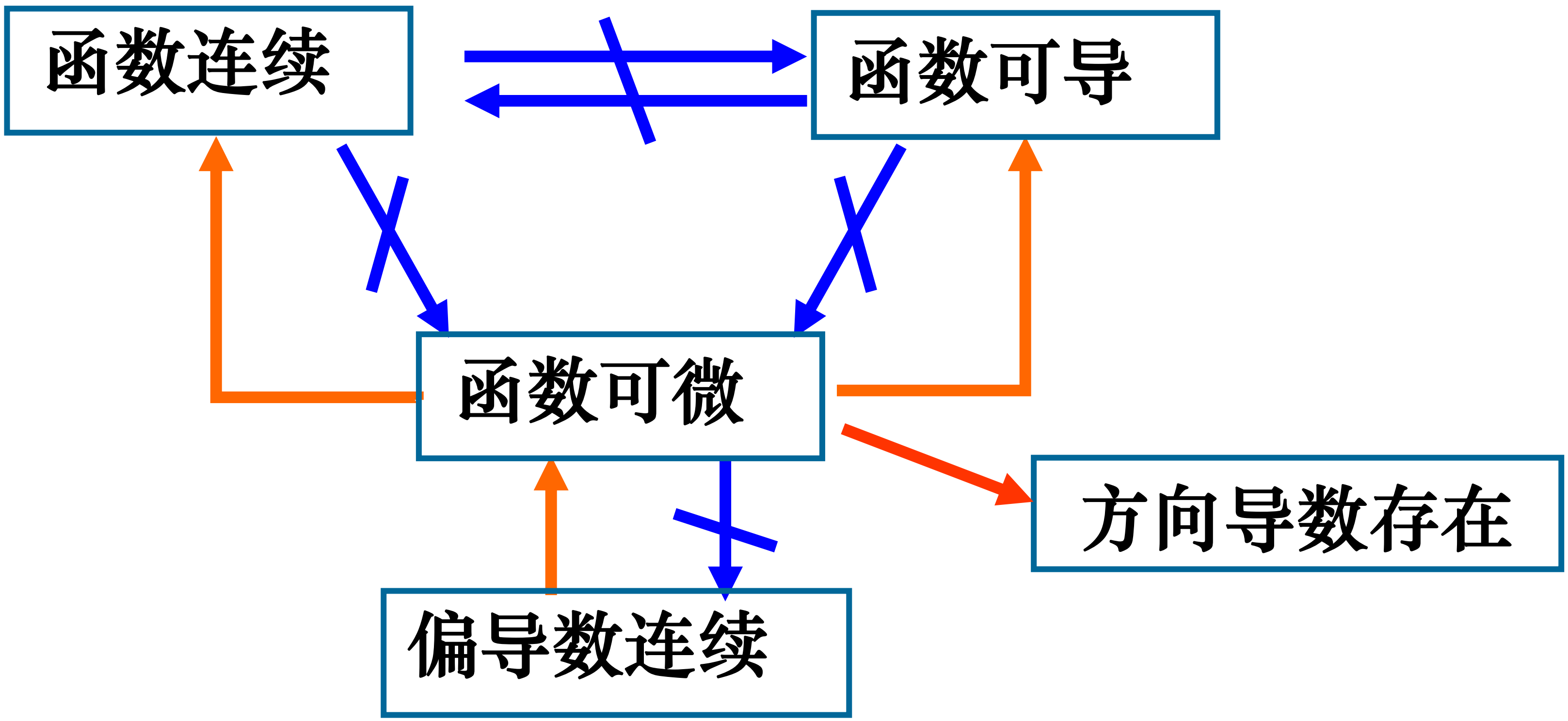
（3）利用极坐标变换化成一元函数的极限。

3、确定极限不存在的方法：

（1）找两条不同路径，使(x,y)沿这两条路径趋向于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限都存在，但不相等；

（2）找一条特殊路径，使(x,y)沿此路径趋向于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限不存在。

（二）多元函数连续、可导、可微的关系



1、全微分定义：设 $z = f(x,y)$

$$\Delta z = \underline{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

证明二元函数不可微的方法

要证明 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不可微，只需求极限：

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

若此极限存在且等于 0，则 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，否则 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不可微，其中

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

2、求偏导数

1、复合函数微分法（链式法则）

2、隐函数微分法（公式）

3、利用全微分求偏导数

3、方向导数和梯度

（1）方向导数： $u=f(x,y,z)$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$沿 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的方向导数为:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$$

（2）梯度： $u=f(x,y,z)$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$的梯度为:

$$\left.gradu\right|_{M_0}=\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}$$

函数沿梯度方向的方向导数最大，其模为方向导数的最大值.

（三）多元函数微分法的应用

1、在几何中的应用

求曲线的切线及法平面 (关键: 抓住切向量)

求曲面的切平面及法线 (关键: 抓住法向量)

空间曲线的切线与法平面

(1) $\Gamma:\quad x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$

切向量 $\vec{\tau} = \pm\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$

(2) $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 切向量 $\vec{\tau} = \pm\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$

曲面的切平面与法线

(1) $\pi: \quad F(x,y,z)=0.$

法向量 $\vec{n}=\pm\{F_x, F_y, F_z\}$

(2) $\pi: \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$

法向量 $\vec{n}=\pm\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

2、极值

1、必要条件：极值点是稳定点。

2、充分条件：若 $z = f(x,y)$，$f_x(x_0,y_0) = 0$，

$f_y(x_0,y_0) = 0$，　令：$f_{xx}(x_0,y_0) = A$，

$f_{xy}(x_0,y_0) = B$，　$f_{yy}(x_0,y_0) = C$，　则　$f(x,y)$

在点(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC - B^2 > 0$时有极值，

当$A < 0$时有极大值，　当$A > 0$时有极小值；

（2）$AC - B^2 < 0$时没有极值；

（3）$AC - B^2 = 0$时可能有极值.

3、求函数$z = f(x, y)$极值的一般步骤：

第一步： 解方程组 $f_x(x, y) = 0,\ \ f_y(x, y) = 0$

求出实数解，得驻点.

第二步：对于每一个驻点(x_0, y_0)，

求出二阶偏导数的值A、B、C.

第三步：定出$AC - B^2$的符号，

再判定是否是极值.

4、求条件极值的一般步骤：

目标函数：$u = f(x, y, z)$，

约束条件：$\varphi(x, y, z) = 0$

（1）构造函数

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z),$$

（2）解方程

$$F_x = 0\ ,\ F_y = 0,\ F_z = 0,\ F_\lambda = 0$$

解出 x, y, z, λ，其中 x, y, z 就是可能的极值点的坐标（即条件极值的稳定点）。

（3）判定此稳定点是否为条件极值的极值点。

重积分

- （一）二重积分
- （二）三重积分
- （三）重积分的应用

（一）二重积分

1、二重积分的概念：

二重积分的定义：　　　和式的极限

几何意义：曲顶柱体的体积 $V=\iint_D f(x,y)d\sigma$

物理意义：平面薄片的质量 $m=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$

二重积分的性质：

关于二重积分的奇偶对称性：

1. 如果 D 关于 y 轴对称，则

(1)若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则 $I=0$;

(2)若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，则 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

2. 如果 D 关于 x 轴对称，则

(1)若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则 $I=0$;

(2)若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，则 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

轮换对称性： 若平面有界闭区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(y,x)d\sigma$$

2、二重积分的计算

（1）二重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \quad \text{[X—型]}$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. \quad \text{[Y—型]}$$

（在积分中要正确选择**积分次序**）

（2）二重积分在极坐标系下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

注意利用对称性化简计算

（二）三重积分

1、三重积分的概念

三重积分的定义：　和式的极限

三重积分的性质：　$\iiint\limits_{\Omega} dv = \Omega$的体积；

奇偶对称性：若空间区域Ω被xoy平面（或 yoz平面，zox平面）分成对称的两块 Ω_1，Ω_2。

(i) 若$f(x,y,z)$关于z(或 x，或 y)是偶函数，则：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv = 2\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

(ii) 若$f(x,y,z)$关于z(或 x，或 y)是奇函数，则：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = 0$$

轮换对称性： 若空间区域 Ω 关于直线 $x=y=z$ 对称，那么被积函数 $f(x, y, z)$ 中的变量 x, y, z 无论怎样互换，积分值不会改变。即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)dv$$

$$= \iiint_{\Omega} f(y,z,x)dv = \iiint_{\Omega} f(x,z,y)dv$$

$$= \cdots\cdots$$

2、三重积分的计算方法

(1) 三重积分在直角坐标下的计算公式

方法1：“先单后重”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法2：“先重后单”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_Z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意利用对称性化简计算

(2）三重积分在柱坐标下的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

(3）三重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

(三)、重积分计算的基本方法小结

1. 选择合适的坐标系；

2. 选择易计算的积分次序；

3. 掌握确定积分限的方法： $\begin{cases} \text{图示法} \\ \text{列不等式法} \end{cases}$

4. 利用奇偶对称性和轮换对称性简化计算；

5. 利用重心公式简化计算；

6. 消去被积函数绝对值符号 $\begin{cases} \text{分块积分法} \\ \text{利用对称性} \end{cases}$

7. 利用重积分换元公式

（四）重积分的应用

(1) 曲顶主体的体积 $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

(2) 平面区域的面积 $S = \iint\limits_D dxdy.$

(3) 空间区域的体积 $V = \iiint\limits_\Omega dxdydz$

(4) 曲面面积 $S: z = f(x,y)$ S的面积为

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy;$$

(5) 重心

平面薄片 D 的面密度为 $\rho(x,y)$，则重心为:

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}.$$

空间物体Ω的密度为 $\rho(x,y,z)$，则重心为:

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega x\rho dv,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega y\rho dv,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\rho dv.\qquad \text{其中 } M=\iiint\limits_\Omega \rho dv.$$

(6) 转动惯量

平面薄片 D 的面密度为 $\rho(x,y)$，则它对于 x 轴、y 轴和原点的转动惯量分别为：

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)d\sigma,$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)d\sigma.$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)d\sigma.$$

空间物体Ω体密度为$\rho(x,y,z)$，则该物体对坐标轴及原点的转动惯量为

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$I_y=\iiint_\Omega (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv,$$

$$I_o=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv.$$

(7) 引力

物体占有空间区域 Ω，体密度$\rho(x,y,z)$，区域Ω外有一质量为 m_0的质点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，则物体对质点P_0的引力为：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$

$$F_x=\iiint\limits_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV$$

$$F_y=\iiint\limits_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dV$$

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dV$$

其中：k为引力常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

曲线积分与曲面积分

- （一）曲线积分与曲面积分
- （二）各种积分之间的联系
- （三）场论初步

曲 线 积 分

	第一类曲线积分	第二类曲线积分
定义	$\int_L f(x,y)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$	$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$
联系	$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$	
计算	$\int_L f(x,y)ds$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi,\psi]\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}dt$ 与方向无关 $(\alpha<\beta)$	$\int_L Pdx+Qdy$ $=\int_\alpha^\beta[P(\varphi,\psi)\varphi'+Q(\varphi,\psi)\psi']dt$ 与方向有关

（一）第一类曲线积分的计算

1、L的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\,,(\alpha<\beta)$$

2、L 的直角坐标方程 $y=y(x)\ (a \le x \le b\,)$，

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

3、 L 的极坐标方程为：$r=r(\theta)$，$\alpha \le \theta \le \beta$，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

4、L 为空间曲线

$$L: x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\ \ z=\omega(t).\quad (\alpha\le t\le\beta)$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

$$(\alpha<\beta)$$

5、 若曲线L的方程为: $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 则需化成参数方程，再进一步用公式求。

（二）第二类曲线积分的计算

1、 对有向光滑弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$， $t:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

2、对有向光滑弧 $L: y=\varphi(x)$， $x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\,\varphi'(x)\}\mathrm{d}x$$

3、若曲线 L 的方程为极坐标方程：$r = r(\theta)\,,\ \theta:\alpha\to\beta$

先化成参数方程：$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$\theta:\alpha\to\beta$

然后用公式计算。

4、若曲线 L 的方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，则需化成参数方程，再进一步用公式求。

5、对空间有向光滑弧 Γ：$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:a\to b \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_a^b \{ P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t)$$
$$+ R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

	曲面积分	
	对面积的曲面积分	对坐标的曲面积分
定义	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$	$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$
联系	$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$	
计算	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds$ $=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$	$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ $=\pm\iint_{D_{xy}}\{P[x,y,z(x,y)]\cdot(-z_x)$ $+Q[x,y,z(x,y)](-z_y)$ $+R[x,y,z(x,y)]\cdot 1\}dxdy$

（三）第一类曲面积分的计算

1. 若曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy;$$

2. 若曲面 $\Sigma: y = y(x,z)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}dxdz;$$

3. 若曲面 $\Sigma: x = x(y,z)$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}dydz.$$

（四）第二类曲面积分的计算

1、若 Σ的方程为：$z = z(x, y)$，$(x, y) \in D_{xy}$，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \{P[x, y, z(x, y)] \cdot (-z_x) + Q[x, y, z(x, y)](-z_y)$$

$$+ R[x, y, z(x, y)] \cdot 1\} dxdy$$

其中：若Σ取上侧，取正号，Σ取下侧，取负号。

2、若 Σ的方程为： $x = x(y,z)$，$(y,z) \in D_{yz}$，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} \{P[x(y,z),y,z] \cdot 1 + Q[x(y,z),y,z](-x_y) + R[x(y,z),y,z](-x_z)\}dydz$$

其中：若Σ取前侧，取正号，Σ取后侧，取负号。

3、若 Σ的方程为：$y = y(z,x)$，$(z,x) \in D_{zx}$，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm \iint_{D_{zx}} \{P[x, y(z,x), z](-y_x) + Q[x, y(z,x), z] \cdot 1$$

$$+ R[x, y(z,x), z](-y_z)\} dzdx$$

其中：若Σ取右侧，取正号，Σ取左侧，取负号。

	与平面路径无关的四个等价命题
条件	在平面单连通开区域 D 上 $P(x,y),Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数,则以下四个命题等价.
等价命题	(1) 在 D 内 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关 (2) $\oint_C Pdx+Qdy=0,\forall$ 闭曲线 $C\subset D$ (3) 在 D 内存在 $U(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$ (4) 在 D 内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

	与曲面无关的四个等价命题
条件	在空间二维单连通区域G上$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，则下述命题等价
等价命题	(1) 在G内$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$与曲面无关 (2) 在$G$内$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0\,,\forall\Sigma\subset G$ (3) 在G内，恒有$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

	与空间路径无关的四个等价命题
条件	在空间一维单连通区域G上$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，则以下命题等价.
等价命题	(1) 在G内$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$与路径无关 (2) $\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0, \forall$闭曲线$\Gamma\subset G$ (3) 在G内存在$U(x,y,z)$使$du=Pdx+Qdy+Rdz$ (4) 在G内，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$

格林公式

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy \quad (\text{沿}L\text{的正向})$$

高斯公式

$$\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

斯托克斯公式

$$\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

第一类曲线积分、曲面积分的计算方法

1. 直接利用计算公式计算；

2. 利用奇偶对称性和轮换对称性简化计算；

3. 利用形心坐标简化计算。

几何应用： 柱面及旋转曲面的侧面积

物理应用： 质心，转动惯量，引力

第二类曲线积分的计算方法

1. 利用公式，化为定积分计算。

2. 补上辅助曲线（如平行于坐标轴的直线等）形成封闭曲线，然后利用格林公式转化为二重积分和辅助线上的曲线积分。

3. 利用积分与路径无关的定理，选取适当的积分路径，可以简化计算。

第二类曲面积分的计算方法

1. 利用公式，化为二重积分计算。

2. 补上辅助曲面（如平行于坐标面的平面等）形成封闭曲面，然后利用高斯公式转化为三重积分和辅助面上的曲面积分。

3. 利用斯托克斯公式化成第二类曲线积分，有时可以简化计算。

场论初步

梯度 $$grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

散度 $$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度 $$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

级数

- （一）数项级数
- （二）幂级数
- （三）泰勒级数
- （四）傅里叶级数

（一）数项级数的判别法

1. 正项级数判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

$\Big\downarrow$ 满足

- 比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$
- 根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ $\longrightarrow$ 不定，用它法判别：

- 部分和极限
- 比较判别法
- 积分判别法

$\rho < 1$ $\longrightarrow$ 收 敛

$\rho > 1$ $\longrightarrow$ 发 散

(1) 比较判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛(发散)且$v_n \le u_n (u_n \le v_n)$,

则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛(发散).

(2) 比较判别法的极限形式

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$, 则 $0 < l < +\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

有相同的敛散性; $l = 0$时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

当$l = +\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

(3) 比值判别法(达朗贝尔 D’Alembert 判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛;$\rho>1$时级数发散; $\rho=1$时失效.

(4) 根值判别法 (柯西判别法)

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数,

如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ (ρ为数或$+\infty$),

则$\rho<1$时级数收敛; $\rho>1$时级数发散;$\rho=1$时失效.

(5) 柯西积分判别法

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数。若存在一个定义在$[1,+\infty)$上的单调下降的非负函数$f(x)$，满足$u_n=f(n)$，$n=1,2,\cdots$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件为$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛。

2、任意项级数判别法

概念: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法: 若 $u_n \geq u_{n+1} > 0$，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛，且余项 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

比值判别法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数,且 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$ ，则

（1）ρ < 1时级数绝对收敛；

（2）ρ > 1（或= +∞）时级数发散。

根值判别法（柯西判别法)：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数,且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$ ，则

（1）ρ < 1时级数绝对收敛；

（2）ρ > 1（或= +∞）时级数发散。

（二）幂级数

1、幂级数收敛半径求法

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ （或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$）

(1) 则当$\rho \neq 0$时, $R = \frac{1}{\rho}$;

(2) 当 $\rho = 0$ 时, $R = +\infty$;

(3) 当 $\rho = +\infty$ 时, $R = 0$.

求幂级数收敛域的方法

- 标准形式幂级数: 先求收敛半径 R ， 再讨论 $x = \pm R$ 处的敛散性 .

- 非标准形式幂级数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{通过换元转化为标准形式} \\ \text{直接用比值法或根值法} \end{array} \right.$

2、幂级数和函数的分析运算性质:

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可积,且对$\forall x \in (-R,R)$可逐项积分.

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，并可逐项求导任意次.

利用以上性质求幂级数的和函数。

3、幂级数和函数的求法

- 求部分和的极限；
- 分解（拆相相消）、套用公式；
- 逐项求导或逐项求积分（在收敛区间内）

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} \arrow[r, "\text{逐项求导或求积分}"'] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n} \arrow[d, "\text{求和}"] \\
\boxed{S(x)} & \boxed{S^*(x)} \arrow[l, "\text{对和式积分或求导}"]
\end{tikzcd}$$

- 数项级数求和 $\begin{cases} \text{直接求和: 直接变换, 求部分和等} \\ \text{间接求和: 转化成幂级数求和, 再代值} \end{cases}$

4、常用已知和函数的幂级数

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 逐项求导化为 (1)的形式;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ 逐项求积分化为 (1)的形式。

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$;

$$(6)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x$$

$$(7)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x$$

$$(8)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}=\ln(1+x);$$

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}=-\ln(1-x);$$

（三）泰勒级数

1. 定义： 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处任意阶可导,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒级数**.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的**麦克劳林级数**.

2. 函数的幂级数展开法

- 直接展开法 — 利用泰勒级数
- 间接展开法 — 利用已知函数的展开式及幂级数的性质

3. 常用函数的泰勒级数

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$x \in (-1, 1)$$

（四）傅里叶级数

1. 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

正交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad (\text{其中 } n = 1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (\text{其中 } m, n = 1,2,\cdots)$$

2. 函数的傅里叶级数展开法

(1).周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

其中
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

则和函数为:

$$s(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] & x\text{为间断点} \\ \frac{1}{2}\left[f(\pi-0)+f(-\pi+0)\right] & x=\pm\pi \end{cases}$$

(2). 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数 $(a_n=0, n=0,1,\cdots)$
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数 $(b_n=0, n=1,2,\cdots)$

(3). 周期延拓

奇延拓: 令 $$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$f(x)$的正弦级数 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (0<x<\pi)$$

偶延拓: 令 $$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le\pi \\ f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$f(x)$的余弦级数 $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (0\le x\le\pi)$$

(4). 周期为2*l* 的函数的傅里叶级数展开公式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 0,1,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

则和函数为:
$$s(x) = \begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] & x\text{为间断点} \\ \dfrac{1}{2}\left[f(l-0) + f(-l+0)\right] & x = \pm l \end{cases}$$

3、 求傅里叶展开式的步骤;

1.验证是否满足狄利克雷条件;

2.判断奇偶性;

3.求出傅里叶系数;

4.写出傅里叶级数;

5.写出和函数。