泛函分析导引

Hongxin Zhang

2007-06-21

State Key Lab of CAD&CG, ZJU

泛函分析概览

- 形成于20世纪30年代的数学分支
- 从变分问题，积分方程和理论物理的研究中发展而来
- 综合运用了函数论，几何学，代数学的观点

- 可看成是无限维向量空间的解析几何及数学分析

研究内容

- 无限维向量空间上的函数，算子和极限理论
- 研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射

泛函分析的产生

- 十九世纪后数学发展进入了一个崭新阶段
  - 对欧几里得第五公设的研究，引出了非欧几何
  - 对于代数方程求解的研究，建立并发展了群论
  - 对数学分析的研究又建立了集合论
- 二十世纪初出现了把分析学一般化的趋势
  - 瑞典数学家弗列特荷姆和法国数学家阿达玛发表的著作
  - 希尔伯特空间的提出
- 分析学中许多新理论的形成，揭示出分析、几何、代数的许多概念和方法常常存在相似的地方
  - 代数方程求根和微分方程求解都可以应用逐次逼近法，并且解的存在和唯一性条件也极其相似
  - 非欧几何的确立拓广了人们对空间的认知，n维空间几何的产生允许我们把多变函数用几何学的语言解释成多维空间的影响

泛函分析的产生

- 函数概念被赋予了更为一般的意义
  - 古典分析中的函数概念是指两个数集之间所建立的一种对应关系
  - 现代数学的发展却是要求建立两个任意集合之间的某种对应关系
- 在数学上，把无限维空间到无限维空间的变换叫做算子
- 研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论，就产生了一门新的分析数学，叫做泛函分析。

泛函分析的特点

- 把古典分析的基本概念和方法
  - 一般化
  - 几何化
- 从有限维到无穷维
  - 泛函分析对于研究现代物理学是一个有力的工具
    - 从质点力学过渡到连续介质力学，就要由有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统
    - 现代物理学中的量子场理论就属于无穷自由度系统

泛函分析的主要研究内容

- 泛函分析自身
  - 算子谱理论、巴拿赫代数、拓扑线性空间理论、广义函数论
- 与其他数学学科的关联
  - 微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用，建立群上调和分析理论的基本工具
- 与其他科学学科的关联
  - 连续介质力学、量子物理学，是研究无限个自由度物理系统的重要而自然的工具之一

$L^p[a,b]$空间

- 表示区间$[a,b]$绝对值的p次幂L可积函数的全体，并把几乎处处相等的函数看成是同一个函数。

$$\forall x(t) \in L^p[a,b], \int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t \ (p \geq 1)\text{存在}$$

- 拓展古典分析中的概念
  - Lebesgue测度
  - Lebesgue积分

从Riemann积分到Lebesgue积分

- Riemann积分的定义：
  - 设 $f(x)$ 是定义在$[a, b]$上的有界函数
  - 在$[a, b]$上任意取一组分点$a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, 并任意取 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$，作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

  - 若其极限存在则称Riemann可积

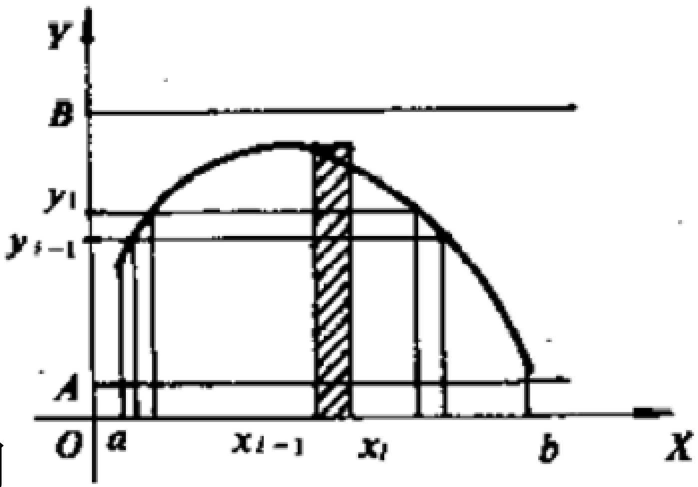
$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

从Riemann积分到Lebesgue积分

- **Riemann积分的思想是**，将曲边梯形分成若干个小曲边梯形，并用每一个小曲边梯形的面积用小矩形来代替，小矩形的面积之和就是积分值的近似。剖分越精细，近似程度越好。

- 不可积分的反例：Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$$

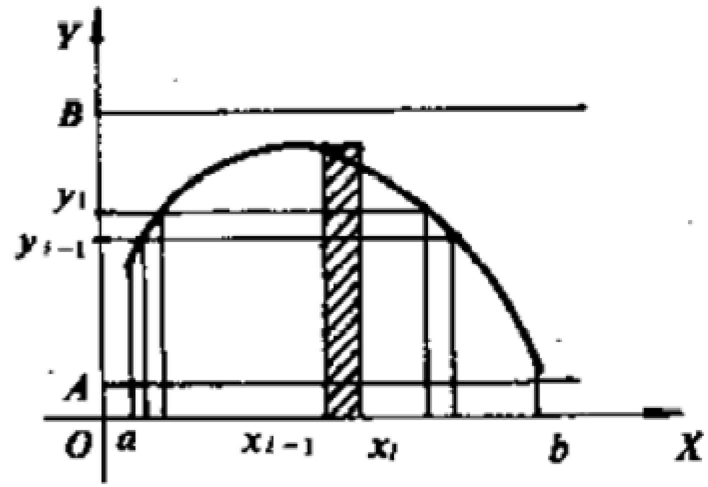


- 该函数太不连续了，在小区间内变化很大

从Riemann积分到Lebesgue积分

- **Legesgue积分的思想是**，优先照顾函数取值，将函数值相差不大的那些x集中起来，考虑集合$E_i = \{ x \mid y_{i-1} < f(x) < y_i \}$，然后求其长度， $y_i\, m(E_i)$和$y_{i-1}\, m(E_i)$用来近似所对应的那块面积，最后再对所有的小块积分
- Dirichlet函数仍旧可以积分

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{为有理数} \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数} \end{cases}$$



从Riemann积分到Lebesgue积分

- Legesgue积分方法所面临的问题：
  - 给定直线上的点集E，如何定义它的“长度”？引出了**集合测度**的概念
  - 对于任何实数a和b，点集$\{ x \mid a \leqslant f(x) < b\}$是否有长度？该问题与函数$y = f(x)$的性质密切相关，引出了**可测函数**的概念

泛函分析中的三个“空间”概念

- 距离空间
- Banach空间（完备的赋范线性空间）
- Hilbert空间（完备的内积空间）

大千世界，具云：三千大千世界。四大部洲之上，加须弥山半腰的四天王天，及须弥山顶的忉利天，并空间中的夜摩天、兜率天、化乐天、他化自在天等六天为欲界。再加上层的大梵天、梵众天、梵辅天等，色界初禅天为一世界，千个世界为小千世界。又一小千世界，具千日、千月、千须弥山、千四大部洲、千四天王天、千忉利天、千夜摩天、千兜率天、千化乐天、千他化自在天、千梵天等。又千个小千世界为中千世界，具百万日月、百万须弥山、百万四天下、百万六欲天、百万初禅天及千个二禅天。又千个中千世界为大千世界，具百亿日月、百亿须弥山、百亿四天下、百亿六欲天、百亿初禅天、百亿二禅天及千个三禅天。所谓三千世界，乃小千、中千、大千之所指三数目的千世界。又云大千，即指三千之中的大为目标，故说「三千大千世界」，略云「大千世界」。

距离空间：定义

- 设X是非空集合，对于X中的任意两元素x与y，按某一法则都对应唯一的实数 $\rho(x, y)$，并满足以下三条公理（距离公理）：

1. 非负性：　$\rho(x, y) \geqslant 0$，　$\rho(x, y) = 0$当且仅当$x=y$；
2. 对称性：　$\rho(x, y) = \rho(y, x)$；
3. 三角不等式；对任意的x, y, z

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

- 则称 $\rho(x, y)$为x与 y间的距离（或度量），并称X是以 ρ 为距离的距离空间（或度量空间），记成(X, ρ)，或简记为X；X中的元素称为X中的点.

距离空间：注记

- 所谓距离空间，就是在集合X内引入了距离.
    - 在一个集合中，定义距离的方式不唯一。如果对同一个集合X引入的距离不同那么所构成的距离空间也不同
    - 在集合互中引入距离后，我们就说在X中引入了拓扑结构
- 极限是数学分析中的基本概念之一，有了它可以派生出许多其它概念．泛函分析用距离来导出一般化的极限概念.
    - 如$n\to\infty$时$x_n\to a$，我们应理解为x_n与a的距离当$n\to\infty$时趋向于零.

距离空间： $\boldsymbol{R}^n$

- **n 维实（或复）Euclid空间 $\boldsymbol{R}^n$** 是 n 维向量$x = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$的全体，其中a_i是实（或复）数. 对任何的$x = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $y = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$,规定

$$\rho(x,y) = \left[\sum_i (a_i - b_i)^2\right]^{1/2}$$

- 则$\boldsymbol{R}^n$是距离空间

距离空间： $L^p[a,b]$

- $L^p[a,b]$表示区间$[a,b]$绝对值的p次幂L可积函数的全体，并把几乎处处相等的函数看成是同一个函数，对于$x, y\in L^p[a,b]$，规定

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \,\mathrm{d}t\right]^{1/p}, p\geq 1$$

- 则$L^p[a,b]$构成一个距离空间，称之为p次幂可积函数空间

距离空间：开集与闭集

- 邻域：给定距离空间 X

$$\delta(x)=\{y \mid \rho(x,y)<\delta, y\in X\}$$

- 开集：

设$G\subset X$，$x\in G$，若存在$\delta(x)\subset G$，则x为G的内点

若G上的每一点都是内点，G是X的开集

- 闭集：其补集是开集

距离空间：稠密性

- 设A,B为距离空间$(X,\ \rho)$中的两个集合，若对任意的$x\in A$，总存在$y_n\in A$，使得$y_n\to x$，则称B在A中稠密

- 例子
  - 有理数集$\boldsymbol{R}_0$在实数集$\boldsymbol{R}$中稠密
  - 多项式集$\boldsymbol{P}$在连续函数集$C[a,b]$中稠密

距离空间：可分性

- 设 X 是距离空间，如果 X 中存在一个可列子集 X_0，使得X_0在X 中稠密，则**距离空间 X 是可分的**

- 例子
  - n维Euclid空间是可分的
  - 连续函数集$C[a, b]$是可分的

- **目的：用简单的逼近复杂的**

距离空间的完备性

- 柯西序列
  - 设$\{x_n\}$是(X, ρ)中的点列，若对任意的 $\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n, m>N$时，有 $\rho(x_n, x_m)< \varepsilon$. 则称 $\{x_n\}$是X中的柯西(Cauchy)序列，或称基本序列

- 收敛的序列必然是柯西序列，而柯西序列未必是收敛的序列——空间的不完备性

- 若距离空间(X, ρ)中的每一个柯西序列都收敛于(X, ρ)中的某一元素，则称(X, ρ)是完备的距离空间

距离空间的完备性

- $C[a,b]$和 $L^p[a,b]$都是完备距离空间

距离空间：不动点原理

- 定义：设(X, ρ)为距离空间，T是 X 到 X中 的映照，如果存在数a (0<a<1)，使得对所有的$x,y \in X$都有 $\rho(Tx, Ty)<a\rho(x, y)$，则称T是压缩映照

- 定理：完备距离空间 X 上的压缩映照T，必存唯一的不动点x^*,使得$Tx^*=x^*$.（Banach压缩映照定理）

距离空间：不动点原理

- 应用：微分方程，代数方程，积分方程解的唯一存在性

- 例子：Fredholm第二类积分方程

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t$$

- 对充分小的| λ |，可证
  - 当$f \in C[a, b]$，$K(s, t) \in C[a, b; a, b]$时有唯一连续解
  - 当$f \in L^2[a, b]$，$K(s, t) \in L^2 [a, b; a, b]$时有唯一平方可积解

线性空间

- 设$\boldsymbol{V}$是一个非空集合，$\boldsymbol{K}$是实（或复）数域，并可在其上定义“加法”，“数乘”运算，而且满足以下公理
  - 加法交换律：$x+y = y+x$
  - 加法结合律：$(x+y)+z = x+(y+z)$
  - 存在零元：$x+0=x$
  - 存在逆元：$x+(-x)=0$
  - 数乘：$1x=x$
  - $a(bx)= (ab)x$
  - $(a+b)x=ax+bx$
  - $a(x+y)=ax+ay$

$x,y,z \in V$

$a,b \in K$

- 则称$\boldsymbol{V}$是数域$\boldsymbol{K}$上的线性空间

范数与赋范线性空间

- 设X是实（或复）线性空间，如果对于X中每个元素x，按照一定的法则对应于实数$\|x\|$，且满足：
  - $\|x\| \geqslant 0$， $\|x\|=0$当且仅当x等于零元（$x=0$）
  - $\|ax\|=|a|\|x\|$， a是实（或复）数
  - $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
- 则称X是实（或复）赋范线性空间， $\|x\|$称为x的范数

- 赋范线性空间必然是距离空间：
  - 定义 $\rho(x, y)=\|x-y\|$

范数与赋范线性空间

- 距离空间未必是赋范空间
  - 反例：所有数列构成的空间 $S=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\mid x_i\in R\}$
  - 定义距离：

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i+y_i|}$$

  - 取 $x=(1,1,\ldots,1,\ldots),\theta=(0,0,\ldots,0,\ldots)$

$$\rho(x,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{2}{1+1}=\frac{1}{2}\qquad \rho(2x,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

$$2\rho(x,\theta)\neq\rho(2x,\theta)$$

巴拿赫(Banach)空间

- 如果赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$是完备的，则称$(X, \|\cdot\|)$是Banach空间

- 例子
  - n 维Euclid空间$\boldsymbol{R}^n$是Banach空间
  - $L^p[a,b]$ ($p\geqslant 1$)是Banach空间，定义范数

$$\|x\| = \left[\int_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right]^{1/p}, p \geq 1$$

巴拿赫(Banach)空间

- 例子：$C^k[a,b]$是Banach空间
  - $C^k[a,b]$表示定义在区间$[a,b]$上k阶连续可导的函数全体. 在$C^k[a,b]$定义范数

$$\|x\| = \sum_{j=0}^{k} \max \left| x^{(j)}(t) \right|, x^{(0)}(t) = x(t) \in C[a,b]$$

  - 回忆在变分中提到的***k*阶接近度**

有限维赋范线性空间

- 线性空间的维数：若线性空间 X 中存在 n 个线性无关的元素 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，使得任意的 $x \in X$ 都可以唯一的表示为

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 \ldots + c_n e_n$$

- 则称 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 X 的基底，数组 $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 是 x 关于基底的坐标，n 是线性空间的维数

- 有限维赋范线性空间可以等价于Euclid空间
  - 有限维线性空间与Euclid空间是线性同构的
  - 有限维赋范线性空间上的范数定义是等价的
  - 有限维赋范线性空间是完备，可分的

有界线性算子

- 设T是由赋范线性空间 X 中的某个子集 D 到赋范线性空间 X_1 中的一个映照，则称 T 是算子. D 是 T 的定义域，记为$D(T)$，像集$\{y \mid y=Tx, x\in D\}$是T 的值域，记为$T(D)$.

- 若T进一步满足
  - 可加性：$T(x+y)=Tx+Ty$
  - 齐次性：$T(ax)=aT(\mathrm{x})$
- 则T是线性算子

- 若存在正数M使得对于一切$x\in D(T)$，有$\|Tx\| \leqslant M\|\mathrm{x}\|$，则$T$是有界算子

有界线性算子

- T是有界线性算子等价于T是连续线性算子

- 算子的范数：
  - 对于一切$x \in D(T)$有$\|Tx\| \leqslant M\|x\|$都成立的M的下确界，称作算子的范数，记为$\|T\|$

有界线性算子

- 对于任何$x\in L[a,b]$定义

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s$$

- 则T为$L[a,b]$到其自身的有界线性算子，且

$$\|T\|=b-a$$

- 容易证明线性
- 其次
- 等号成立情况

$$\|Tx\|=\int_a^b|Tx(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b\left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t$$

$$\le\int_a^b\left(\int_a^t|x(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$\le\int_a^b\left(\int_a^b|x(s)|\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b|x(s)|\,\mathrm{d}s=(b-a)\|x\|$$

有界线性算子空间

- 定理：设 X 和 X_1 都是赋范线性空间，在$B(X, X_1)$中定义加法和数乘运算：

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x \quad (T_1,T_2 \in B(X, X_1)，\ x \in X)$$
$$(aT)x=a(Tx) \qquad (T \in B(X, X_1)，\ a\text{是数})$$

- 则$B(X, X_1)$按照以上的线性运算是一个线性空间，并以前述算子范数的定义构成赋范线性空间
- 若X_1是Banach空间，则$B(X, X_1)$也是Banach空间

有界线性算子空间：共轭空间

- 若X_1是实数（或复数）域R，则$B(X, X_1)$称为**共轭空间**，记为 X^*

- X^*是定义在X上的所有有界线性泛函所构成的赋范线性空间，泛函$f \in X^*$的范数是

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

- 实数（或复数）域R是完备的，因此共轭空间必定是Banach空间

不同的收敛方式

- 定义T_n，$T\in B(X, X_1)$，$n=1,2,\ldots$
  - 若$\|T_n-T\|\to 0$,称T_n按算子范数收敛于$T\ (n\to\infty)$，或称T_n一致收敛于T
  - 若对于任意的x，均有$\|T_nx-Tx\|\to 0$，则称T_n强收敛于T
- 定义f_n，$f\in X^*$，$n=1,2,\ldots$
  - 若$\|f_n-f\|\to 0$，则称f_n强收敛于$f\ (n\to\infty)$
  - 若对于任意的x，均有$\|f_nx-fx\|\to 0$，则称f_n弱*收敛于$f\ (n\to\infty)$
  - 若对于任意的f，均有$\|f(x_n)-f(x)\|\to 0$，则称x_n弱收敛于$x\ (n\to\infty)$

$L^p[a,b]$ ($p>1$)上的有界线性泛函

- 设$x \in L^p[a,b]$，$y \in L^q[a,b]$，且1/p+1/q=1，则$L^p[a,b]$上的有界线性泛函是

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

- 且$(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$

- 当$p=q=2$时，$(L^p[a,b])^* = L^q[a,b]$，故空间$L^2[a,b]$是自共轭空间

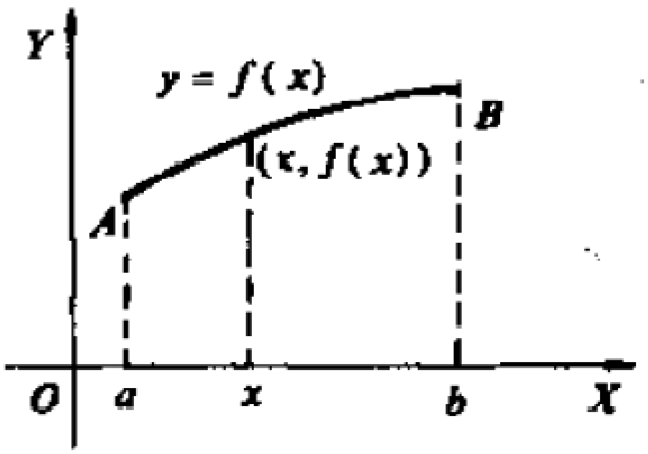
赋范线性空间的几个重要定理

- 非零有界线性泛函存在定理
- 逆算子定理
  - 类似于反函数定理：单调函数必存在反函数
  - 有界线性算子T将Banach空间 X 一一的映照到Banach空间 Y，则 T 的逆算子线性有界
  - 特例：Fourier变换，Laplace变换

赋范线性空间的几个重要定理

- 闭图象定理
  - 设T是定义在Banach空间X上值域包含在Banach空间Y上的线性算子，则T是有界算子的充要条件是T是闭算子
  - 线性算子T的图像

$$G_T = \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subset X \times Y$$



  - 是 $X \times Y$中的闭集，则称T是闭算子
- 闭图象定理常用来验证算子的连续性

赋范线性空间的几个重要定理

- 共鸣定理：
  - 对于有界线性算子序列，若代入每一个值都有上界，则有界线性算子序列本身有界。

- 可用于证明
  - Lagrange插值多项式作为连续函数近似表达时，插值点无限增多并不能更好的逼近插值函数。
  - 存在连续函数其Fourier级数无法一致收敛

有界线性算子的正则集与谱

- 相似性
  - 矩阵的特征分解 $Ax-\lambda x=y$
  - Fourier级数展开

内积空间

- 几何化：引入正交投影的概念

- 定义：设 $\boldsymbol{X}$ 是定义在实（或复）数域$\boldsymbol{K}$上的线性空间，若对于$\boldsymbol{X}$ 任意一对有序元素x,y, 恒对应数域$\boldsymbol{K}$的值(x, y)，且满足
  - $(ax, y) = a(x, y)$；
  - $(x+y, z) = (x, z) + (x, z)$
  - $(x, y) = \overline{(y, x)}$
  - $(x, x) \geqslant 0$，且$(x, x)=0$的充要条件是$x=0$
- 则称X为内积空间，(x, y)称为x, y的内积

Hilbert空间

- 可由内积导出范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

- 完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间
  - Hilbert空间必为Banach空间

Hilbert空间

- $L^2[a,b]$中定义x, y的内积(x, y)为

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y}(t)\mathrm{d}t,\ x(t),y(t)\in L^2[a,b]$$

- 因此， $L^2[a,b]$是一个可分的Hilbert空间

- $L^p[a,b]$ $(p\neq 2)$不可能诱导由范数诱导出内积空间

Hilbert空间

- 赋范线性空间X成为内积空间的充要条件是它的范数满足中线公式

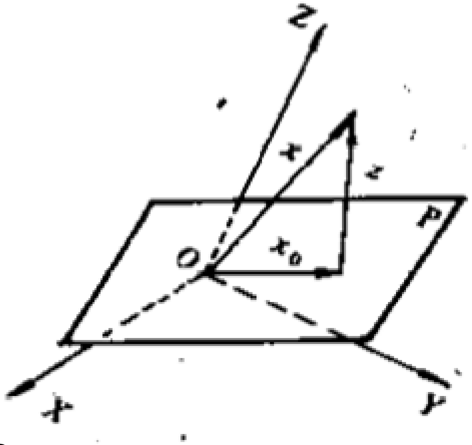
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

- 而且内积可表示为

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-y\|^2)$$

Hilbert空间

- 正交 $(x, y) = 0$，记为$x \perp y$



- 正交补 $A^{\perp} = \{x \mid x \perp A, x \in X\} \subset X$
- 勾股定理 $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- 正交分解：设M是内积空间X的完备子空间，则对任意$x \in X$，均有以下**唯一的正交分解**

$$x = x_0 + z,\ x_0 \in M, z \in M^{\perp}$$

内积空间中的标准正交系

- 定义：内积空间X中的元素列$\{e_k\}$，如果满足

$$(e_i, e_j) = 0, i \neq j$$

- 则称$\{e_k\}$是一正交系. 进一步，如果满足

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- 则称$\{e_k\}$是一标准正交系

- 有限维空间，将给定向量展开成正交单位向量的线性组合
- 无限维空间，将给定函数展开成Fourier级数

内积空间中的标准正交系

- $L^2[-\pi, \pi]$中，三角函数列

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x....$$

- 是标准正交系

Gram-Schmidt正规化过程

定理1(Gram-Schmidt) 若$\{x_k\}$是内积空间 X 的线性无关系，则必可作出一个标准正交系$\{e_k\}$，使得$\{x_k\}$与$\{e_k\}$的第 k 个元素均可由另一系的前 k 个元素线性表示，即

$$\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\} = \{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \mid c_i \in P, i = 1, 2, \cdots, k\}$.

Gram-Schmidt正规化过程

例3 $\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是$L^2[-1,1]$中的线性无关系，但不是正交系. 利用 Gram-Schmidt 过程，可得$L^2[-1,1]$中的标准正交系

$$\{P_0(t),P_1(t),P_2(t),\cdots,P_n(t),\cdots\},$$

$$P_0(t)=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$P_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$P_2(t)=\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right),$$

这恰好是勒让德(Legendre)多项式

$\cdots$

$$P_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,$$

$\cdots$.

完备的标准正交系

定义3 设$\{e_k\}$是内积空间 X 中的一个标准正交系，$x\in X$，称$c_k=(x,e_k)$为 x 关于 $e_k(k=1,2,\cdots)$的 Fourier 系数，而称

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$$

为 x 关于标准正交系$\{e_k\}$的 Fourier 级数.

定义4 设$\{e_k\}$是内积空间 X 中的一个标准正交系. 如果对每个 $x\in X$，都有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2,\quad c_k=(x,e_k),$$

则称$\{e_k\}$是 X 中的完备的标准正交系，上述等式称为巴塞弗(Parseval)公式.

可列的完备标准正交系

定理5 每一个可分的 Hilbert 空间 H 都与 l^2（或 R^n）等距且同构.

Hilbert空间的自共轭性