# 第一章

# 函数 极限 连续

（习题课）

## 题组一：函数

1. 设 $f(x)$ 满足 $a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (a , b , c 为常数),

且 $|a|\neq|b|$ ,又 $f(0)=0$， 证明 $f(x)$ 是奇函数.

**解:**

$$\left.\begin{array}{l} a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\dfrac{c}{x} \\ \qquad\downarrow \\ a\,f(\frac{1}{x})+b\,f(x)=cx \end{array}\right\} \longrightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(-x)=\begin{cases} \frac{1}{a^2-b^2}(-\frac{ac}{x}+bcx) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f(x)=-f(-x)$$

2. 设 $y=f(x)$ 是严格单调增函数, 则其反函数 $x=\varphi(y)$ 也是单调增函数.

**解:** 利用反证法.

假设 $x=\varphi(y)$ 是单调减函数, 则必存在 $\underline{y_1<y_2}$ 使 $\varphi(y_1)=\underline{x_1\ge x_2}=\varphi(y_2)$，这与 $y=f(x)$ 严格单调增矛盾, 因此函数 $x=\varphi(y)$ 是单调增函数.

3. 设 $a$ , $b$ 是常数,且 $a<b$，若 $f(a-x)=f(a+x)$ 及 $f(b-x)=f(b+x)$，试证: $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

**证明:** $f(x+2(b-a))=f(b+(x+b-2a))$

$$=f(b-(x+b-2a))$$

$$=f(2a-x)$$

$$=f(a+(a-x))$$

$$=f(a-(a-x))$$

$$=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leq |x|<3\end{cases}$,

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

**解:** $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases} \rightarrow f[g(x)]=\begin{cases}0, g(x)<0\\ 1, g(x)\geq 0\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\leq |x|<3\end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x)<0 \rightarrow 1\leq |x|<2 \\ g(x)\geq 0 \rightarrow |x|<1 \text{ 或 } 2\leq |x|<3 \end{cases}$

$\rightarrow f[g(x)]=\begin{cases}0, & 1\leq |x|<2\\ 1, & |x|<1\text{或}2\leq |x|<3\end{cases}$.

接4.

**解:** $$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|<1\\ |x|-2, & 1\le |x|<3\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|<1\\ |f(x)|-2, & 1\le |f(x)|<3\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}|f(x)|<1 \rightarrow x<0\\ 1\le |f(x)|<3 \rightarrow x\ge 0\end{cases}$$

$$\rightarrow g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & x<0\\ |f(x)|-2, & x\ge 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

$$\rightarrow g[f(x)]=\begin{cases}2, & x<0\\ -1, & x\ge 0\end{cases}$$

## 题组二：极限

1. 设 $a>0$ 且 $x_1>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{4}(3x_n+\frac{a}{x_n^3})(n=1,2,3,\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ .

**解:** 先证明数列的极限存在.

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3})\geq\frac{1}{4}\cdot4\cdot\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$$

$x_n$ 有下界.

$x_{n+1}<x_n<\cdots<x_1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}(3+\frac{a}{x_n^4})$$

$$x_n\geq\sqrt[4]{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{1}{4}(3+\frac{a}{a})=1$$

接1.

再求数列的极限值.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = m$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3})$$

得 $$m = \frac{1}{4}(3m + \frac{a}{m^3})$$

解得 $$m = \sqrt[4]{a}$$

即 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[4]{a}.$$

2. 设 $a_n > 0$， 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**解:** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 可知，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N > 0$，当$n > N$时，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} r-\varepsilon < \underline{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r+\varepsilon} \\ \text{取 } \varepsilon > 0\text{，使 } 1 > r+\varepsilon \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} q \end{array}\right\} \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$$

$$\rightarrow\; \underline{0 <}\, a_{n+1} < q a_n < q^2 a_{n-1} < \cdots \underline{< q^n a_1} \rightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right].$

**解:** 设 $t=\dfrac{1}{x}\to +\infty\ (x\to 0^+)$

于是 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{[t]}{t}$

因 $t>0$ 时, $t-1\le [t]\le t$

故 $1\leftarrow \dfrac{t-1}{t}\le\dfrac{[t]}{t}\le 1 \quad (t\to +\infty)$

因此 $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{[t]}{t}=1=\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[\sin x\tan\dfrac{1}{x}+\dfrac{(2x+1)^5(x+3)^{10}}{(x-5)^{15}}]$.

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x\cdot\tan\dfrac{1}{x})+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^5(x+3)^{10}}{(x-5)^{15}}$

$$=0+2^5 \quad =2^5$$

5. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界量}}\cdot\sin\underbrace{\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小量}}=0$$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$.

**解:** $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x\to 0)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{(\sqrt{1+\sin x})^2-(\sqrt{1-\sin x})^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2\sqrt{1-x^2}}=1.$$

7. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^{\sin x}}{x\ln(1-2x^2)}$.

**解:** $\ln(1-2x^2)\sim -2x^2 \qquad (x\to 0)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x(-2x^2)}$$

$$\boxed{e^{\tan x-\sin x}-1\sim \tan x-\sin x \quad (x\to 0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(\tan x-\sin x)}{-2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\tan x(1-\cos x)}{-2x^3}$$

$$\boxed{\tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \quad (x\to 0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}x}{-2x^3}\cdot\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{4}.$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}+\dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$.

**解:**

$$\text{原式}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{1+\cos\pi x}}_{(1)}+\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}}_{(2)}$$

$$(1)\text{式}=\lim_{x\to 1}\frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\,[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(1+\sqrt{x})\,[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](1+\cos\pi x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-x)}{(1+\sqrt{x})[1+\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2](1+\cos\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{6}\frac{(1-x)^2}{1+\cos\pi x}$$

$$\xlongequal{\boxed{t=x-1}}\lim_{t\to 0}\frac{1}{6}\frac{t^2}{1-\cos\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{6}\frac{t^2}{\frac{1}{2}(\pi t)^2}=\frac{1}{3\pi^2}.$$

接8.

(2) 式 $= \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

因此　原式 $= \dfrac{1}{3\pi^2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ .

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

**解:**

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & |x|<1\\ \infty, & |x|>1\\ 0, & x=-1\\ \infty, & x=1\end{cases}.$$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$．求常数 $a$ , $b$ .

解:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)-\frac{a+b}{x}+\frac{1-b}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{(1-b)t^2-(a+b)t+1-a}{t^2+t}$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0}(t^2+t)=0$

所以 $\lim\limits_{t\to 0}[(1-b)t^2-(a+b)t+1-a]=0$ 故 $a=1$.

接10.

将 $a=1$ 代入原极限得

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1-b}{x}-(1+b)}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$=-(1+b)=0$$

所以 $b=-1$.

因此 $a=1$, $b=-1$.

11. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}$ 存在，求常数 $a$ 及其极限值.

**解:** 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ ,

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-ax^2-x+4)=4-a \ =0$

即 $a=4$

这样 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}(3x^2-8x-1) \ =-6\,.$$

## 题组三：连续

1. 讨论函数的连续性，若有间断点判断其类型.

(1) $f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$

**解：** $f(x)=\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$

间断点为：$x=0$, $x=1$, $x=-1$.

其中 $x=0$, $x=1$ 为可去间断点,

$x=-1$ 为无穷间断点.

(2) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

**解:** $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

间断点为：$x=0$ , $x=n\pi\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots)$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e$ , $\lim\limits_{x\to n\pi}f(x)=\infty$

所以 $x=0$ 是第一类间断点,

$x=n\pi$ 是第二类间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & |x|\le 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$

**解:**

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 1-x, & x<-1\\ \cos\frac{\pi}{2}x, & -1\le x\le 1\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$，

所以 $x=-1$ 为跳跃间断点.

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}$

**解:**

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}=\begin{cases}-x\ , & x>0\\ 1\ , & x=0\\ \dfrac{1}{x}\ , & x<0\end{cases}$$

显然 $x=0$ 为第二类间断点.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} a+\arccos x, -1<x<1 \\ b \qquad ,\quad x=-1 \\ \sqrt{x^2-1} \quad ,\quad x<-1 \end{cases}$，试确定常数 $a$ , $b$ ,

使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

**解:** $f(-1)=b$ , $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=a+\pi$ , $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=0$ ,

要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续， 需有

$$f(-1)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-} f(x)$$

即 $b=a+\pi=0$

故 $b=0$ ， $a=-\pi$ .

3. 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，试确定常数 $a$ , $b$ .

**解:**

$x=0$ 为无穷间断点 $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1-b}{a}=\infty$

$\downarrow$

$a=0$ , $b\neq 1$

$x=1$ 为可去间断点 $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}=A$

$\downarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0 \longrightarrow b=e$

4. 试证:方程$x\tan x+2x^2=\frac{\pi}{4}$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内至少有一实根.

**解:** 设$f(x)=x\tan x+2x^2-\frac{\pi}{4}$，则它在$[0,\frac{\pi}{4}]$上连续.

又知 $f(0)=-\frac{\pi}{4}<0$, $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{8}>0$,

由零点定理知，至少存在一点$\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$使$f(\xi)=0$.

而$(0,\frac{\pi}{4})\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，因此方程在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

内至少有一实根.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$，证明:
至少存在一点 $\xi\in[0,a]$，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

**解:** 设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$，

因 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，故 $f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续，

因此 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续.

而 $F(0)F(a)=[f(a)-f(0)][f(2a)-f(a)]$

$$\Big\downarrow\ \boxed{f(0)=f(2a)}$$

$$=-[f(a)-f(0)]^2\le 0$$

当 $F(0)F(a)=0$ 时，

接5.

若 $F(0)=0$， 则 $f(a)=f(0)$， 取 $\xi=0$ 即可.

若 $F(a)=0$， 则 $f(2a)=f(a)$，取 $\xi=a$ 即可.

当 $F(0)F(a)<0$ 时,

由零点定理，存在 $\xi\in(0,a)$ 使 $F(\xi)=0$，

即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内非负连续,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$,

证明:在 $(a,b)$ 内必有 $\xi$, 使 $f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$ .

**解:** 不妨假设 $x_1<x_2<\cdots<x_n\in(a,b)$,

因为 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内非负且连续 ,

所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 内非负且连续 .

由闭区间上连续函数的最值定理得:

在该区间上一定存在最大值 $M$ 和最小值 $m$ .

记 $f(\xi_1)=m$ , $f(\xi_2)=M$ , 于是有

$$m\le f(x_i)\le M \qquad x_i\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

所以 $m^n\le f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\le M^n$

接6.

$$m^n \le f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \le M^n$$

$$f(\xi_1) = m \le \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)} \le M = f(\xi_2)$$

由介值定理知，一定存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$

使 $$f(\xi) = \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$$

?. 求